ESERCIZIO n. 1 Esprimere come frazione di interi $\log_2 \dfrac{\sqrt[7]{2}}{2+\log_5 25}$.

ESERCIZIO n. 2 Trovare il dominio di $\dfrac{1}{\log \frac{1}{\sin x}}$.

ESERCIZIO n. 3 Cinque ceppi batterici sottoposti a trattamento presentano rispettivamente un tasso di mortalità del 80%, 20%, 50%, 80%, 20%. Sottoposti ad un secondo trattamento questi dati si modificano rispettivamente in 40%, 60%, 50%, 40%, 60%. Si calcoli la correlazione lineare tra i due campioni.

ESERCIZIO n. 4 Entro che limiti percentuali varia la concentrazione di una soluzione per una quantita' di soluto pari a $4l \pm 4dl$ in $8-10l$ di solvente? con che errore relativo la si puo' valutare?

ESERCIZIO n.5 Risolvere graficamente, mettendo in evidenza gli intervalli di soluzione sull'asse orizzontale la diseguaglianza $|e^{-x}-1| > 1$.

ESERCIZIO n. 6 Si calcoli l'area del triangolo di vertici $(1,1,1)$, $(2,-1,-2)$ e $(4,-1,2)$..

ESERCIZIO n. 7 Si calcoli il polinomio di Taylor centrato in $x=0$ di grado 4 di $f(x) = \frac{x^3-1}{e^x}$.

ESERCIZIO n. 8 Calcolare la primtiva di $\frac{e^x}{e^2x+1}$.

ESERCIZIO n. 9 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale:
$x''(t) - 3x'(t) - 3x(t) = 0$

• ESERCIZIO n. 10 Si scrivano le coordinate del simmetrico del generico punto dello spazio di coordinate (x,y,z) rispetto al piano per l'origine ortogonale al vettore $(1,1,1)$.

• ESERCIZIO n.11 Si tracci il grafico di $\dfrac{1}{\log \frac{1}{\sin x}}$.

• ESERCIZIO n.12 Una grandezza aleatoria X può assumere solo come valori le potenze di 3 con funzione di distribuzione $P(X=3^n) = \frac{c}{10^n}$; n in $\mathbb{N}$.

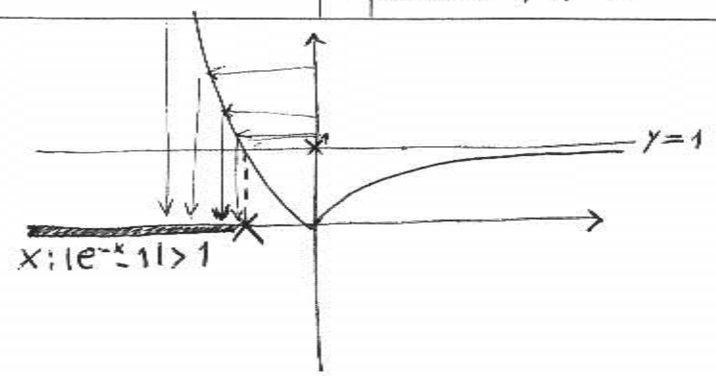
a- Si calcoli c per cui effettivamente quella data sia la distribuzione di probabilità sui valori ammissibili.

b- Si calcoli il valor medio di X.

Matematica e Statistica, Anno Accademico 2008-2009,
Scienze Ecologiche e della Biodiversità
Jmmy A. Mauro, Vincenzo M. Tortorelli
VII appello A: 18 Gennaio 2010

COGNOME		N. MATRICOLA	
NOME		ANNO ISCR.	

ISTRUZIONI al fine della valutazione:
- *compilare l'intestazione in stampatello maiuscolo*
- *riportare con ordine* lo svolgimento della soluzione agli esercizi contrassegnati da •;
- scrivere, nello spazio apposito all'interno della tabella sottostante, *solo* la risposta agli altri;
- il tutto sul presente foglio, *l'unico* che deve essere consegnato.

1	$-\frac{13}{7}$	2	$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi; 2k\pi+\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}+2k\pi; (2k+1)\pi[$
3	-1	4	55%-36%, $e_r = 0{,}2\bar{1}$ $\left(\frac{19}{90}\right)$
5			
6	$3\sqrt{5}$	7	$-1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{5}{6}x^3+\frac{11}{24}x^4$
8	$\arctan(e^x)+c$	9	$Ae^{\frac{3}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + Be^{\frac{3}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

Soluzioni ai quesiti del VII appello del 18/01/10
per il corso di Matematica e Statistica A.A. 2008/2009.

1. $\log_2 \frac{\sqrt[7]{2}}{2+\log_5 25} = \log_2 \frac{2^{\frac{1}{7}}}{2+\log_5 5^2} = \log_2 2^{\frac{1}{7}} - \log_2 (2+\log_5 5^2) =$
$= \frac{1}{7} - \log_2 (2+2) = \frac{1}{7} - \log_2 4 = \frac{1}{7} - 2 = -\frac{13}{7}$

2. $\frac{1}{\log \frac{1}{\sin x}}$

$\sin x \neq 0$	$x \neq k\pi$	$x \neq k\pi$
$\frac{1}{\sin x} > 0$	$\sin x > 0$	$2h\pi < x < 2h\pi + \pi$
$\log \frac{1}{\sin x} \neq 0$	$\frac{1}{\sin x} \neq 1$	$\sin x \neq 1$

$2h\pi \underset{\neq}{<} x \underset{\neq}{<} 2h\pi + \pi$ & $x \neq \frac{\pi}{2} + 2h\pi$ per ogni $h \in \mathbb{Z}$

3.

X	$\frac{8}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\langle X\rangle = \frac{25}{50} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0,5$
$X-\langle X\rangle$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$V_x = \frac{36}{500} = \frac{9}{125} = 0,072$ $\quad \sigma_x = \frac{3}{5\cdot\sqrt{5}}$
Y	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\langle Y\rangle = \frac{25}{50} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0,5$
$Y-\langle Y\rangle$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$V_y = \frac{4}{500} = \frac{1}{125} = 0,008$ $\quad \sigma_y = \frac{1}{5\cdot\sqrt{5}}$
$P = (X-\langle X\rangle)(Y-\langle Y\rangle)$	$-\frac{3}{100}$	$-\frac{3}{100}$	0	$-\frac{3}{100}$	$-\frac{3}{100}$	$\frac{1}{5}\Sigma P = -\frac{4\cdot 3}{500} = -\frac{3}{125}$

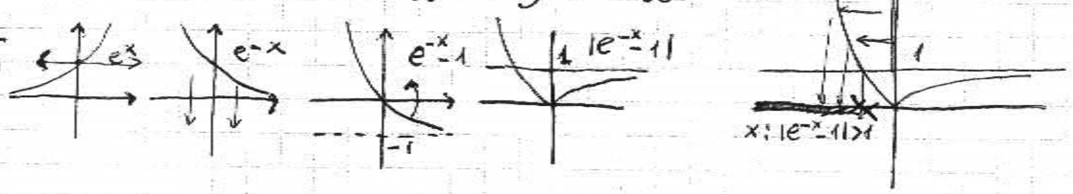
$Cov(XY) = -\frac{3}{125}$ $\qquad corr(XY) = \frac{Cov(XY)}{\sigma_x \sigma_y} = -\frac{3}{125} \cdot \frac{5\cdot\sqrt{5}}{3} \cdot 5\cdot\sqrt{5} = -1$

4. $Solu_{MAX} = 4\,l + 4\,dl$ $\quad Solu_{MIN} = 4\,l - 4\,dl$ $\quad Solu_{MAX} = 4,4\,l$ $\quad Solu_{MIN} = 3,6\,l$
$Solv_{MAX} = 9\,l + 1\,l$ $\quad Solv_{MIN} = 9\,l - 1\,l$ $\quad Solv_{MAX} = 10\,l$ $\quad Solv_{MIN} = 8\,l$

Concentrazione = C $\quad C_{MAX} = \frac{Solu_{MAX}}{Solv_{MIN}} = \frac{4,4}{8} = \frac{44}{80} = 0,55$ $\quad C_{MIN} = \frac{Solu_{MIN}}{Solv_{MAX}} = \frac{3,6}{10} = 0,36$

limiti percentuali di concentrazione 55% - 36%

errore relativo quoziente ≤ somma errori relativi =
$= e^r_{solu} + e^r_{solv} = \frac{1}{10} + \frac{1}{9} = \frac{19}{90} = 0,2\overline{1}$

5 

6 $\text{Area} = \frac{1}{2} |\sin A\hat{B}C| \cdot |\vec{BA}| \, |\vec{BC}| = \frac{1}{2}\sqrt{\|BA\|^2\|BC\|^2-(BA\cdot BC)^2}$

$|\sin A\hat{B}C| = \sqrt{1-\cos^2 A\hat{B}C}$

$B = (1,1,1)$

$A = (2,-1,-2)$ $\quad BA = (2,-1,-2)-(1,1,1) = (2-1,-1-1,-2-1) = (1,-2,-3)$

$C = (4,-1,2)$ $\quad BC = (3,-2,1)$

$\left(\cos A\hat{B}C = \frac{BA\cdot BC}{\|BA\|\,\|BC\|}\right)$

$\|BA\|^2 = 1+4+9 = 14$

$\|BC\|^2 = 9+4+1 = 14$

$BA\cdot BC = 3+4-3 = 4$

$\text{Area} = \frac{1}{2}\sqrt{14\cdot 14-16} = \sqrt{7\cdot 7-4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

7 $f(x) = \frac{(x^2-1)}{e^x} = (x^2-1)e^{-x}$ per calcolare il polinomio di Taylor basta calcolare quello di e^{-x} e sostituire

$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24}+o(t^4) = 1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$

$t=-x$

$f(x) = (x^2-1)\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right) =$

$= x^2-x^3+\frac{x^4}{2}+o(x^4)-1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}+o(x^4) =$

$= -1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{5}{6}x^3+\frac{11}{24}x^4+o(x^4)$

Quindi il polinomio di Taylor di grado 4 e centro 0 di $\frac{x^2-1}{e^x}$ è $-1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{5}{6}x^3+\frac{11}{24}x^4$.

8 Calcolare la primitiva di $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$

$\int^x \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}} \overset{y=e^x}{=} \int^{e^x}\frac{dy}{1+y^2} = \arctan e^x + c$

9 $x''(t) - 3x'(t) - 3x(t) = 0$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 3 = 0 \qquad \lambda \in \frac{3 + \sqrt{9-12}}{2}$$

$$\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x(t) = Ae^{\frac{3}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + Be^{\frac{3}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

10 Il piano per l'origine e perpendicolare a (1,1,1) ha equazione che devono soddisfare le cordinate dei suoi punti data dall'annullarsi del prodotto scalare con (1,1,1): è la condizione di ortogonalità.

$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ sta sul piano menzionato se e solo se $\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}=0$

$(\cos(\widehat{xyz\,\text{ocon}(1,1,1)}) = 0)$

dato quindi un punto $(x,y,z) = P$

il suo riflesso Q si ottiene partendo dal punto P muovendosi in direzione ortogonale al piano

quindi avrà coordinate del tipo $(x+t, y+t, z+t) = Q$

d'altronde il punto medio tra P e Q sarà sul piano, quindi le sue coordinate

$\frac{P+Q}{2} = (x+\frac{t}{2}, y+\frac{t}{2}, z+\frac{t}{2})$ devono soddisfare

$$(x+\tfrac{t}{2}) + (y+\tfrac{t}{2}) + (z+\tfrac{t}{2}) = 0$$

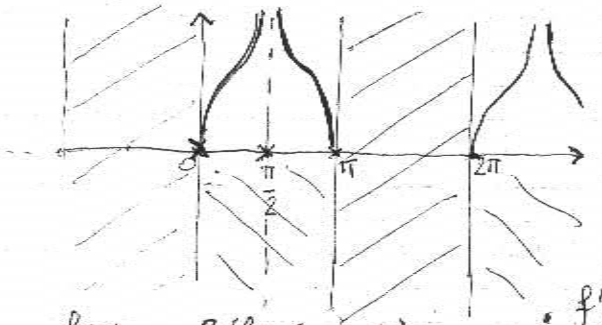
per cui $t = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z$

quindi $Q = \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z, \frac{y}{3} - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}z, \frac{z}{3} - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}x\right)$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

11 $f(x) = \dfrac{1}{\log \frac{1}{\sin x}} = -\dfrac{1}{\log \sin x}$ $\qquad x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad 2k\pi \underset{\neq}{<} x \underset{\neq}{<} (2k+1)\pi$

- La funzione è 2π periodica. basta tracciare il grafico in $]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$ e ripeterlo negli altri intervalli del dominio.
- $f(\frac{\pi}{2}$ $= f(\frac{\pi}{2} + h)$ quindi basta tracciare il grafico $]0, \frac{\pi}{2}[$ e rifletterlo rispetto alla retta verticale $x = \frac{\pi}{2}$.



- poiché $\sin x < 1$ nel dominio $f(x) > 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{1}{\log \sin x} = \lim\limits_{y \to 0^+} -\dfrac{1}{\lg y} = 0$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} -\dfrac{1}{\log \sin x} = \lim\limits_{y \to 1^-} -\dfrac{1}{\lg y} = +\infty$ $\quad$ ($y<1$, $\lg y < 0$)

- $f'(x) = -\left(-\dfrac{1}{(\log \sin x)^2} \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x\right)$

$f(x) = -R(\log(\sin x))$

$R(z) = \frac{1}{z}$

$f'(x) = -R'(z) \log'(\sin x) \cdot (\sin x)' = \dfrac{1}{(\log \sin x)^2} \dfrac{1}{\sin x} \cos x > 0$ se $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sin x (\log \sin x)^2} \cdot \lim\limits_{x \to 0^+} \cos x = \lim\limits_{y \to} \dfrac{1}{y (\lg y)^2} = +\infty$

quindi la tangente nell'origine è verticale.

12 a Per ipotesi X non può assumere valori diversi dalle potenze di 3 cioè <u>in ogni caso</u> esiste $n \in \mathbb{N}$ $X = 3^n$. in particolare

$P(\{\exists n \in \mathbb{N}\ X = 3^n\}) = 1$ $\quad$ ora $\{\exists n \in \mathbb{N}\ X = 3^n\} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{X = 3^n\}$

quindi

$1 = P(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{X = 3^n\}) =$ essendo gli eventi $\{X = 3^n\}$ disgiunti $=$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} P(X = 3^n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C \left(\frac{1}{10}\right)^n = C \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}) = C \dfrac{1}{1 - \frac{1}{10}} = C \dfrac{1}{\frac{9}{10}}$

per cui $c = \dfrac{9}{10}$

b $\langle X \rangle = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n P(X = 3^n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n \dfrac{9}{10} \cdot \dfrac{1}{10^n} = \dfrac{9}{10} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{3}{10}\right)^n =$

$= \dfrac{9}{10} \dfrac{1}{1 - \frac{3}{10}} = \dfrac{9}{7}$