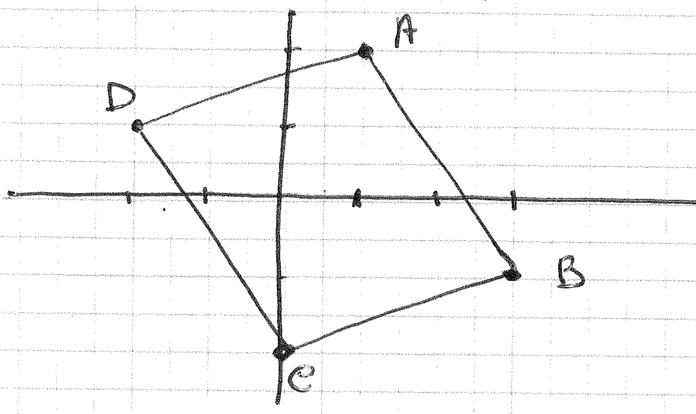
Calcolare l'area del ~~parallelogramma~~ quadrilatero di vertici
A (1,2) B (3,-1) C (0,-2) D (-2,1) dopo aver verificato che è un parallelogramma



Determiniamo i vettori

$\overrightarrow{AB} = (3-1, -1-2) = (2,-3)$

$\overrightarrow{DC} = (0-(-2), -2-1) = (2,-3)$

$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0$ Quindi $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

cioè i lati AB e DC sono //

Determiniamo i vettori $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AD} = (-2-1, 1-2) = (-3,-1)$ $\overrightarrow{BC} = (0-3, -2-(-1)) = (-3,-1)$

$\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ Quindi $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ ed i lati AD e BC sono paralleli. Il quadrilatero ABCD avendo i lati opposti paralleli è un parallelogramma.

Area $= \left| \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \right| = |-2-9| = 11$

Determinare le equazioni parametriche e cartesiane delle rette AD, AB, BC, CD

$\boxed{P(t) = P_0 + \vec{v}\, t}$

AB: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-3t \end{cases}$ BC: $\begin{cases} x = 3-3t \\ y = -1-t \end{cases}$

DC: $\begin{cases} x = 2t \\ y = -2-3t \end{cases}$ AD: $\begin{cases} x = 1-3t \\ y = 2-t \end{cases}$

Le equazioni cartesiane si possono ricavare nei seguenti modi

AB • $\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$ $A \equiv (1, 2)$ $B \equiv (3, -1)$

$$\frac{y-2}{-1-2} = \frac{x-1}{3-1}$$

$$\frac{y-2}{-3} = \frac{x-1}{2} \; ; \; \frac{x-1}{2} + \frac{y-2}{3} = 0 \; ; \; 3x-3+2y-4=0$$

$$3x+2y-7=0$$

• AB $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-3t \end{cases}$ $\begin{cases} x-1 = 2t \\ y-2 = -3t \end{cases}$ $\begin{vmatrix} (x-1) & 2 \\ (y-2) & -3 \end{vmatrix} = 0$

$$-3(x-1) - 2(y-2) = 0 \quad 3x-3+2y-4=0$$

$$3x+2y-7=0$$

• AB $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-3t \end{cases}$ $t = \frac{x-1}{2}$

$$y = 2 - 3\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

$$2y+3x-3-4=0 \qquad 3x+2y-7=0$$

BC: $x-3y-6=0$; DC: $3x+2y+4=0$; DA: $x-3y+5=0$

Scrivere equazioni parametriche e cartesiana della retta s passante per P(3,4) e parallela alla retta

r: $2x+3y-2=0$

s: $2x+3y+q=0$

Passaggio per P(3,4)

$6+12+q=0 \quad q=-18$

$2x+3y-18=0$

$\boxed{y-y_0 = m(x-x_0)}$ $m_r = -\frac{2}{3}$

$y-4 = -\frac{2}{3}(x-3)$

$2x-6+3y-12=0$

$2x+3y-18=0$

Eq. parametriche

$r: 2x + 3y - 18 = 0 \qquad y = -\frac{2}{3}x + 6$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 6 - \frac{2}{3}t \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x = 3t \\ y = 6 - 2t \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$$

Tutte e tre le diverse ~~equazioni~~ formule parametriche descrivon la medesima retta r.

Dopo aver verificato che i punti $A(1,2)$ $B(-2,1)$ $C(0,-2)$ non sono allineati e che, quindi determinano un triangolo, determinare eq. parametriche e cartesiane dei lati; eq. par. e cart. delle parallele ai lati condotte dai vertici opposti; l'area del triangolo.

- Condizione di non allineamento

$$\boxed{\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} \neq \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}} \qquad \frac{-2-2}{1-2} \neq \frac{0-1}{-2-1} \qquad 4 \neq \frac{1}{3}$$

oppure $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$ non paralleli

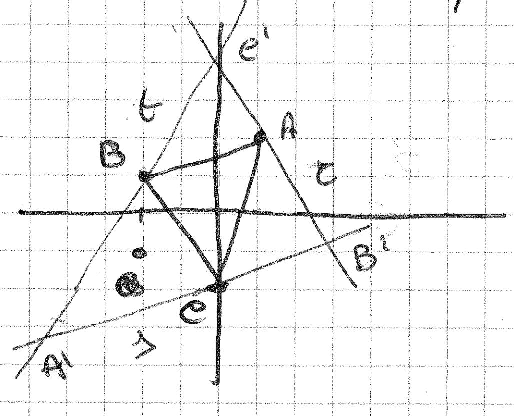
$\vec{AB} = (-2-1, 1-2) = (-3, -1) \qquad \vec{BC} = (0-(-2), -2-1) = (2, -3)$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 9 + 2 = 11 \neq 0$$

- Eq. dei lati $\vec{AB}: (-3, -1)$ $\vec{BC} = (2, -3)$ $\vec{AC} = (-1, -4)$

$$AB: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - t \end{cases} \qquad BC: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases} \qquad AC: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$$

$AB: x - 3y + 5 = 0$; $BC: 3x + 2y + 4 = 0$; $AC: 4x - y - 2 = 0$



r passante per A e // a BC

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \qquad r: 3x + 2y - 7 = 0$$

retta s passante per C e // AB

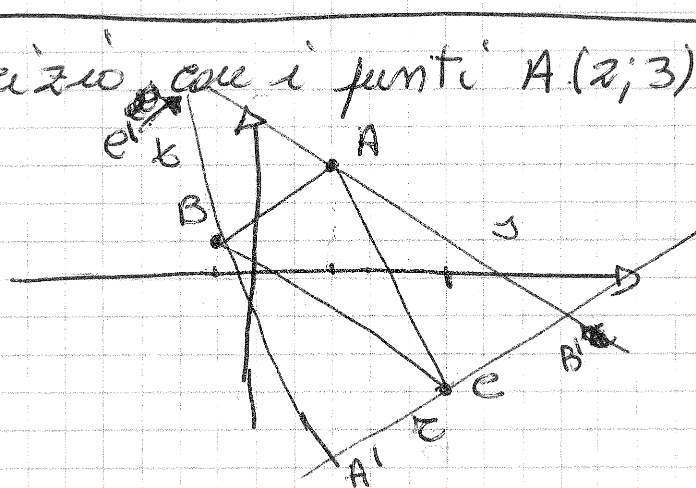
$s: \begin{cases} x = -3t \\ y = -2-t \end{cases}$ $s: x - 3y - 6 = 0$

retta t passante per B e // AC

$t: \begin{cases} x = -2-t \\ y = 1-4t \end{cases}$ $t: 4x - y + 9 = 0$

Area del triangolo $\frac{1}{2}$ dell'area del parallelogramma avente per 3 vertici A, B, C. $A(T) = \frac{11}{2}$

Ripetere lo stesso esercizio con i punti A(2;3) B(-1,1) C(5,-3)



$AB: \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 3+2t \end{cases}$

$2x - 3y + 5 = 0$ AB

$BC: \begin{cases} x = -1+6t \\ y = 1-4t \end{cases}$

$BC: 2x + 3y - 1 = 0$

$AC: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-2t \end{cases}$

$AC: 2x + y - 7 = 0$

---

r passante per C, // AB

$r: \begin{cases} x = 5+3t \\ y = -3+2t \end{cases}$

$r: 2x - 3y - 19 = 0$

s per A, // BC

$\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 3-2t \end{cases}$ s

$s: 2x + 3y - 13 = 0$

---

t per B, // AC

$t \begin{cases} x = -1+t \\ y = 1-2t \end{cases}$ $t: 2x + y + 1 = 0$

Area $\frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} \right\| =$

$\frac{3}{2} |-6-2| = 4 \cdot 3 = 12$

Determinare i punti di intersezione A', B', C' delle rette r, s, t dei precedenti 2 esercizi.

$A' = s \cap t$ è possibile determinare A' ponendo a sistema le equazioni cartesiane di s e t

$$\begin{cases} x - 3y - 6 = 0 \\ 4x - y + 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4x + 12y + 24 = 0 \\ 4x \quad - y + 9 \quad = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 11y + 33 = 0 \\ x = 3y + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \qquad A'(-3, -3)$$

$B' = s \cap r$ è possibile determinare B' anche ponendo a sistema le equazioni parametriche di s ed r (chiamando però con lettere diverse i parametri delle 2 rette)

$$s: \begin{cases} x = -3t \\ y = -2 - t \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x = 1 + 2K \\ y = 2 - 3K \end{cases}$$ si eguagliano fra loro le x e le y

$$\begin{cases} -3t = 1 + 2K \\ -2 - t = 2 - 3K \end{cases} \quad \begin{cases} 3t + 2K + 1 = 0 \\ t - 3K + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3t + 2K + 1 = 0 \\ -3t + 9K - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 3K - 4 \\ 11K = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} t = -1 \\ K = 1 \end{cases}$$ per determinare le coordinate di B' bisogna sostituire $t = -1$ nell'eq. di s oppure $K = 1$ nell'eq. di r. [i valori $t = -1$ e $K = 1$ non sono quindi le coordinate dei punti, ma solo i valori dei parametri che ci permettono di individuare le coordinate di B'].

$$B' \begin{cases} x = -3(-1) \\ y = -2 - (-1) \end{cases} \qquad B'(3, -1) \qquad \left[\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot 1 \\ y = 2 - 3 \cdot 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \right]$$

I due diversi valori dei parametri individuano, quindi, il medesimo punto B'. Attenzione a non invertire i parametri, sostituendoli uno nell'equazione dell'altra.

$C' = t \cap r$ è possibile determinare C' utilizzando le eq. par. per r e le eq. cart. per t.

$t: 4x - y + 9 = 0$ $\qquad r \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$

Sostituendo le eq. par. di r nell'eq. cartesiana di t si ottiene un'eq per il parametro t.

$4(1+2t) - (2-3t) + 9 = 0$

$4 + 8t - 2 + 3t + 9 = 0$; $11t + 11 = 0$ $\quad t = -1$

Sostituendo $t = -1$ nell'eq. di r è possibile determinare le coordinate di C'

$C': \begin{cases} x = 1 - 2 \\ y = 2 + 3 \end{cases}$ $\qquad C'(-1; 5)$

Determinare le coordinate di A', B', C' per il secondo esercizio.

$A' = r \cap t$	$B' = r \cap s$	$C' = t \cap s$
$A'(2, -5)$	$B'(8, -1)$	$C'(-4, 7)$

Siano assegnate le rette

$r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \end{cases}$ $\qquad s_1: x - 2y + 1 = 0 \qquad s_2: 2x + y - 2 = 0$

- Determinare l'eq. cartesiana della retta t_1 parallela ad r e passante per $P_0 = s_1 \cap s_2$ $\rightarrow$ $P_0\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ $\quad t_1: 5x + 5y - 7 = 0$
- Determinare l'eq. cartesiana della retta t_2 parallela ad s_1 e passante per $Q_0 = r \cap s_2$ $\quad Q_0(1, 0)$ $\quad t_2: x - 2y - 1 = 0$
- Determinare l'eq. cartesiana della retta t_3 parallela ad s_2 e passante per $R_0 = r \cap s_1$ $\quad R_0\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ $\quad t_3: 6x + 3y - 4 = 0$