Disegnare il grafico delle seguenti funzioni

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - x}{x}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x^2}{2} - \log(x-1)^2$

$g(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{|x-1|}$

$f(x) = (x^2 + 2x - 3)\, e^{-x}$ $\qquad g(x) = \dfrac{\log^2 x}{x}$

$f(x) = e^{\frac{4x-5}{x^2-1}}$

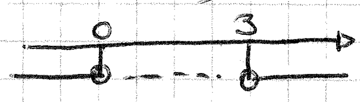
Determinare i punti di Max e min. assoluto di

$f(x) = \dfrac{|x^2 - 3x|}{x}$ nell' intervallo $[1, 5]$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; f è continua nel suo dominio, pertanto f è continua in $[1, 5]$. Per il teorema di Weierstrass f è dotata di Max e min assoluto nell' intervallo $[1, 5]$.

$$f(x) = \frac{|x^2 - 3x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{x} = x - 3, & x < 0 \vee x \geq 3 \\[2ex] \dfrac{3x - x^2}{x} = 3 - x, & 0 < x < 3 \end{cases}$$

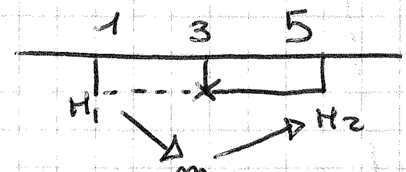
$x^2 - 3x \geq 0$



$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \vee x > 3 \\ -1, & 0 < x < 3 \end{cases}$$

f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$. Pertanto nel punto $x = 3$ f è continua ma non derivabile. I punti di max o min assoluto della restrizione di f all' intervallo $[1, 5]$ vanno ricercati fra gli estremi dell' intervallo, i punti in cui f è continua ma non derivabile, gli eventuali punti in cui si annulla la derivata prima.

$f'(x) \geq 0$



$x = 3$ è un punto di min relativo

$x = 1$, $x = 5$ punti di Max relativo

$f(1) = 2 = f(5)$ $\qquad f(3) = 0$

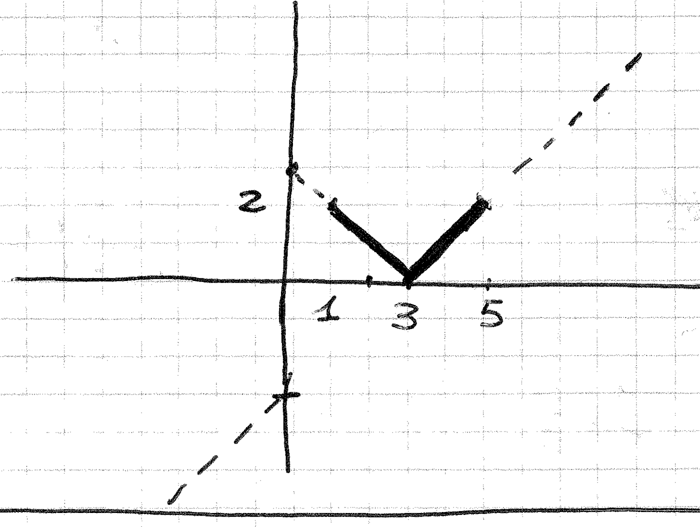
Grafico di f

$M = 2$ Max assoluto

$x = 1$ e $x = 5$ punti di Max assoluto

$m = 0$ min. assoluto

$x = 3$ punto di minimo assoluto.



Determinare i punti di Max e min assoluto di $f(x) = |x^2 - 3x|$ nell'intervallo $[-1, 5]$

$Df = \mathbb{R}$; f è continua in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f continua in $[-1, 5]$

Per il Teo. di Weierstrass f è dotata di Max e min assoluto.

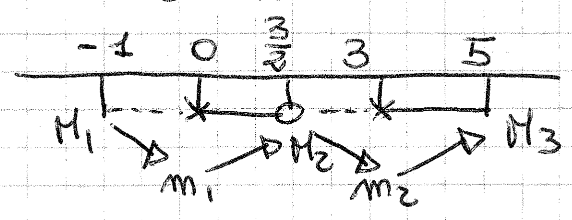
$$f(x) = |x^2 - 3x| = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \leq 0 \ \vee \ x \geq 3 \\ 3x - x^2, & 0 < x < 3 \end{cases}$$

nell'intervallo $[-1, 5]$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x < 0 \ \vee \ x > 3 \\ 3 - 2x, & 0 < x < 3 \end{cases}$$

f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$. Pertanto nei punti $x = 0$ e $x = 3$ f è continua ma non derivabile.

$f'(x) \geq 0$



$x = 0$; $x = 3$ punti di min. relativo

$x = -1$; $x = \frac{3}{2}$; $x = 5$ punti di Max. relativo.

$f(-1) = 4$ $\quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$ $\quad f(5) = 10$

$f(0) = f(3) = 0$

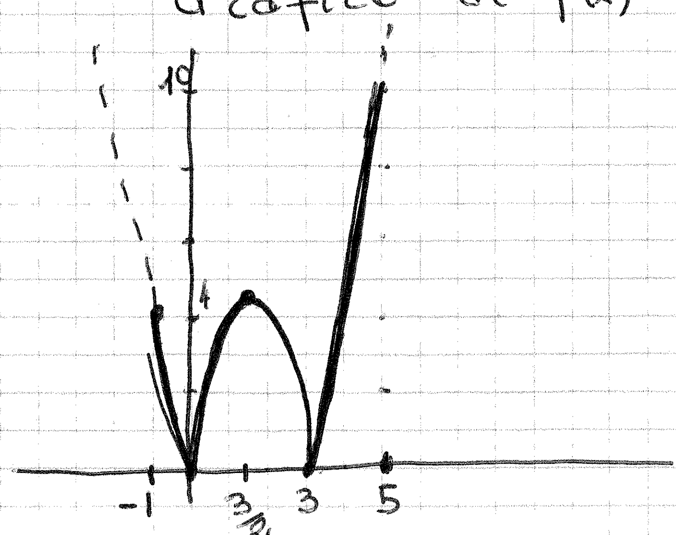
Grafico di f(x)

$M = 10$ Max assoluto

$x = 5$ ponto di Max ass.

$m = 0$ min assoluto

$x = 0$ e $x = 3$ punti di min assoluto



Determinare i parametri a e b in modo tale che f risulti continua e derivabile nel suo dominio.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2\log x, & x \geq 1 \\ bx^2 + 3e^{1-x}, & x < 1 \end{cases} \qquad D_f = \mathbb{R}$$

f è continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

f è continua in $x = 1$ se $f(x) \to f(1)$ per $x \to 1$

$f(1) = a$

per $x \to 1^+$ $\quad f(x) = ax + 2\log x \to a$

per $x \to 1^-$ $\quad f(x) = bx^2 + 3e^{1-x} \to b+3$

f è continua in $x=1$ se e solo se $\quad a = b+3$

$$f'(x) = \begin{cases} a + \frac{2}{x}, & x > 1 \\ 2bx - 3e^{1-x}, & x < 1 \end{cases}$$

Teorema

se f è continua in I, derivabile in $I \setminus \{x_0\}$, ove I è un intervallo e x_0 è un punto interno ad I, se esiste (finito) il limite di $f'(x)$ per $x \to x_0$, allora f è derivabile anche in x_0 ed $f'(x_0)$ è uguale al valore di tale limite.

f continua in (a,b)
f derivabile in $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ $\quad \Rightarrow \quad$ f è derivabile anche in x_0
$f'(x) \to l \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ $\quad$ e $f'(x_0) = l$

---

per $x \to 1^+$ $\quad f'(x) = a + \frac{2}{x} \to a+2$

per $x \to 1^-$ $\quad f'(x) = 2bx - 3e^{1-x} \to 2b - 3$

Supposto f continua in $x = 1$ (cioè $a = b+3$) f risulta derivabile in $x = 1$ se e soltanto se $\quad a+2 = 2b-3$

Pertanto, possiamo concludere che f risulta continua e derivabile nel suo dominio se e soltanto risultano soddisfatte le condizioni

$$\begin{cases} a = b+3 \\ a+2 = 2b-3 \end{cases} \quad \begin{cases} a = b+3 \\ b+3+2 = 2b-3 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 11 \\ b = 8 \end{cases}$$

Stabilire per quali valori dei parametri a e b le seguenti funzioni risultano continue e derivabili nel loro dominio.

$$f(x) = \begin{cases} a + \log(1+x-x^2), & x \leq 0 \\ -3x^2+3ax-b, & x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} - x^2, & x \geq 0 \\ x^2+(2b-a)x+(a+b), & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} a\, e^{x^2-4}, & x \geq 2 \\ (x-2)^3 + bx^2+1, & x < 2 \end{cases}$$

Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 4 e punto iniziale $x_0 = 0$ della funzione

$\log(1+e^x) - x \operatorname{sen} 2x$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4) = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

$$\log(1+e^x) = \log\left[1+\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\right] =$$

$$= \log\left(2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right) =$$

$$= \log\left[2\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{48}+o(x^4)\right)\right] =$$

$$= \log 2 + \log\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{48}+o(x^4)\right)$$

$$(*)\quad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4) \quad \text{con } t_0 = 0$$

Poiché per $x=0$ $\quad \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} + o(x^4)$ vale zero

possiamo usare la formula $(*)$ ponendo $t = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48}$

$$\log(1+e^x) = \log 2 + \log\Big[1 + \underbrace{\Big(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} + o(x^4)\Big)}_{t}\Big] =$$

$$= \log 2 + \Big(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} + o(x^4)\Big) +$$
$$- \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} + o(x^4)\Big)^2$$
$$+ \frac{1}{3}\Big(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} + o(x^4)\Big)^3$$
$$- \frac{1}{4}\Big(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} + o(x^4)\Big)^4 =$$

$$= \log 2 + \Big(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48}\Big) +$$
$$- \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48}\Big)^2$$
$$+ \frac{1}{3}\Big(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48}\Big)^3$$
$$- \frac{1}{4}\Big(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48}\Big)^4 + o(x^4) =$$

Svolgiamo i conti trascurando tutti i termini di grado maggiore di 4 !!

$$= \log 2 + \Big(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} + \cancel{2}\frac{x}{\cancel{2}}\frac{x^2}{4} + \cancel{2}\frac{x}{\cancel{2}}\frac{x^3}{12}\Big)$$
$$+ \frac{1}{3}\Big(\frac{x^3}{8} + 3\frac{x^2}{4}\frac{x^2}{4}\Big) - \frac{1}{4}\frac{x^4}{16} + o(x^4) =$$
$$= \log 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \cancel{\frac{x^3}{12}} + \frac{x^4}{48} +$$
$$- \frac{x^2}{8} - \cancel{\frac{x^3}{8}} - \frac{x^4}{32} - \frac{x^4}{24} +$$
$$+ \cancel{\frac{x^3}{24}} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^4}{64} + o(x^4)$$

$$= \log 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{1}{192}x^4 + o(x^4)$$

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$(x \operatorname{sen} 2x) = x\left(2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^4)\right) = x\left(2x - \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{6}_{3}}x^3 + o(x^4)\right)$

$= 2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^5)$

Pertanto

$\log(1+e^x) - x \operatorname{sen} 2x =$

$= \log 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + o(x^4) - 2x^2 + \frac{4}{3}x^4 + o(x^5) =$

$= \log 2 + \frac{x}{2} - \frac{15}{8}x^2 + \frac{85}{64}x^4 + o(x^4)$

il polinomio di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$ e ordine 4

è $\quad P(x) = \log 2 + \frac{1}{2}x - \frac{15}{8}x^2 + \frac{85}{64}x^4$.

Stimare $\log\left(\frac{3}{2}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{2}\right)$

$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + r(\xi, t) \quad t > 0$

Resto nella forma di Lagrange

con $r = f^{(4)}(\xi)\frac{t^4}{4!} = -\frac{1}{(1+\xi)^4}\frac{t^4}{4} \longrightarrow$ con $0 < \xi < t$ (ξ fissato)

$f(t) = \log(1+t) \quad f'(t) = \frac{1}{1+t} \quad f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$

$f^{(3)}(t) = \frac{2}{(1+t)^3} \quad f^{(4)}(t) = \frac{-6}{(1+t)^4}$

Quindi $\log\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + r(\xi) =$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{8} + r(\xi) = \frac{5}{12} + r(\xi)$ con $r(\xi) = -\frac{1}{(1+\xi)^4}\,\frac{1}{64}$

per qualche $0 < \xi < \frac{1}{2}$

$\frac{5}{12}$ è, quindi, un'approssimazione per eccesso di $\log\frac{3}{2}$ $(r(\xi) < 0)$ e l'errore di approssimazione $\left|\left(\log\frac{3}{2} - \frac{5}{12}\right)\right| = r(\xi) = \frac{1}{(1+\xi)^4}\,\frac{1}{64} < \frac{1}{64}$

(verifica con calcolatrice)

$\left|\log\frac{3}{2} - \frac{5}{12}\right| \simeq |(0{,}405 - 0{,}417)| = 0{,}012 < \frac{1}{64} \sim 0{,}0156$