Analisi Matematica I, Esercitazioni, Anno Accademico 2013 -2014, Ingegneria Gestionale

Tortorelli

LEGENDA

I principali testi e raccolte di esercizi a cui si fa riferimento in queste note sono:

[GGS] M.Ghisi, M. Gobbino, "Schede di Analisi Matetmatica"

[GGE] M.Ghisi, M. Gobbino, "Schede di Analisi Matetmatica"

[FM] A.Faedo, L.Modica, "Analisi I, lezioni"

[ABC] E.Acerbi, G. Buttazzo, "Analisi Matetmatica ABC 1: funzioni di una variabile"

Ogni gruppo di esercitzione è introdotto dagli esercizi pertinenti dei testi di esame degli anni passati, con i seguenti riferimenti:

AACnPNGMEm ovvero AAExnPNGMEm:

AA sono le ultime cifre dell'anno accademico,
C se si tratta di prove in itinere (compitini),
Ex se si tratta di testi di appelli,
P sta per 'parte dell'esame scritto',
E sta per esercizio,
n il numero del compitino o dell'appello,
N è il numero della parte dell'esame in questione(prima o seconda),
M è il numero del gruppo di versione del testo dello stesso esame
m il numero dell'esercizio.

Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

Il corpo dei gruppi di esercitazione è composto da testi quasi tutti manoscritti con numerazione delle pagine indipendente, oltre ai dattiloscritti dei testi d'esame di cui sopra.

Inoltre con:
$*$ si indicano gli esercizi più impegnativi,
$\circ$ quelli di approfondimento o estensione e quelli più teorici.

I GRUPPO DI ESERCITAZIONE, IT: richiami sui prerequisiti, notazioni, funzioni, *grafici notevoli e operazioni sui grafici.*

Manoscritto e riferimenti: pag 1IT Ripasso delle nozioni e tecniche delle scuole secondarie: disequazioni, trigonometria . . . .

- [GGS] pagg. 10-31, [GGE] pagg. 10-15, [ABC] pagg. 44-49

pagg. 2IT-3IT Complementi su notazioni insiemistiche e relazioni con i connettivi logici.

- [GGS] pagg. 34-35, [FM] pagg. 1-9, [ABC] pagg. 40-41

pag. 3IT Operazioni sui grafici e grafici elementari.

pag. 4IT Rappresentazione grafica di funzioni reali di variabile reale.

- [GGS] pagg. 37-39, 45-47, [GGE] pagg. 18-21, 42-45, [FM] pagg. 26-36, [ABC] pagg. 1-14

pag 5IT Funzioni inverse delle funzioni trigonometriche.

Teoria relativa nei testi indicati e svolta a lezione

Testi di esame del primo gruppo di esercitazioni: prime parti
Risolvere i seguenti esercizi senza dare dimostrazioni

13Cprova1P1E1 Determinare l'insieme di definizione di $\sqrt{-\log(x^3-1)}$.

13Cprova1P1E2 Trovare il numero $\alpha \in [0, \pi/2]$ tale che $\sin(x+\alpha) = \cos(x-\alpha)$.

13Cprova1P1E5 Di ciascuno dei seguenti insiemi dire se è limitato e se ammette massimo: a) $[1,2) \cup (-\infty, 0]$; b) $(-2,2) \cap (-\infty, 1]$; c) $\{e^n : n \in \mathbf{Z}\}$.

13Cprova1P1E8 Disegnare il grafico della funzione $-|\arctan x|$.

13Cprova2P1E1 Risolvere la disequazione $\log(x^4-1) \leq 0$.

13Cprova2P1E2 Esprimere $(\sin(2x))^2$ in funzione di $\sin x$.

13Cprova2P1E4 Trovare l'immagine della funzione e^{2-x^2}.

13Cprova2P1E8 Disegnare il grafico della funzione $|e^{-x}-1|$.

13C1P1E1 Determinare il dominio di definizione della funzione $\arcsin(2e^t)$.

13C1P1G1E1 Trovare le soluzioni dell'equazione $\cos(x-1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$.

13C1P1G1E8 Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che: $-\dfrac{1}{x^2} \leq y \leq \cos x - 2$.

13C1P1G2E1 Determinare il dominio di definizione della funzione $\arcsin(\log t)$.

13C1P1G2E2 Trovare le soluzioni dell'equazione $\sin(x+1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nell'intervallo $-1 \leq x \leq 2$.

13C1P1G2E8 Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che: $-\dfrac{1}{x^2} + 1 \leq y \leq \cos x - 1$.

13C1P1G3E1 Determinare il dominio di definizione della funzione $\arccos(3e^t)$.

13C1P1G3E2 Trovare le soluzioni dell'equazione $\cos(x+1) = 1/\sqrt{2}$ con $-2 \leq x \leq 0$.

13C1P1G3E8 Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che: $\dfrac{1}{x^2} \geq y \geq 2 - \cos x$.

13C1P1G4E1 Determinare il dominio di definizione della funzione $\arccos(\log t)$.

13C1P1G4E2 Trovare le soluzioni dell'equazione $\sin(x+2) = 1/\sqrt{2}$ nell'intervallo $-2 \leq x \leq 1$.

13C1P1G4E8 Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che: $\dfrac{1}{x^2} - 1 \geq y \geq 1 - \cos x$.

13C2P1G1E8 Disegnare il grafico di $f(x) = 1 - e^x$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \geq x^2$.

13Ex1P1G1E1 Risolvere la disequazione $\dfrac{x-1}{x^2-4} > 0$.

13Ex1P1G1E8 Disegnare l'insieme dei punti (x,y) che soddisfano $x > 0$ e $\dfrac{1}{x} \leq y \leq \log(x+1)$.

13Ex2P1G1E1 Trovare le soluzioni della disequazione $\sin x \leq 1/2$ comprese tra 0 e 2π.

13Ex2P1G1E8 Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \leq x$.

13Ex2P1G2E1 Trovare le soluzioni della disequazione $\cos x \geq 1/2$ comprese tra 0 e 2π.

13Ex2P1G2E8 Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3}$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \leq x$.

13Ex2P1G3E1 Trovare le soluzioni della disequazione $\sin x \geq -1/2$ comprese tra 0 e 2π.

13Ex2P1G3E8 Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^3}$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \geq x$.

13Ex2P1G4E1 Trovare le soluzioni della disequazione $\cos x \geq -1/2$ comprese tra 0 e 2π.

13Ex2P1G4E8 Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \leq -x$.

13Ex3P1G1E1 Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$.

13Ex3P1G1E8 Disegnare il grafico di $f(x) = |e^x - 1|$.

13Ex3P1G2E1 Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{\sin x}{\sqrt{8-x^3}}$.

13Ex3P1G2E8 Disegnare il grafico di $f(x) = e^{|x|} - 1$.

13Ex3P1G3E1 Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-4}}$.

13Ex3P1G3E8 Disegnare il grafico di $f(x) = |1 - e^x|$.

13Ex3P1G4E1 Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3-8}}$.

13Ex3P1G4E8 Disegnare il grafico di $f(x) = -e^{|x|}$.

13Ex4P1G1E1 Risolvere la disequazione $\log\log x > 0$.

13Ex4P1G1E8 Risolvere la disequazione $\log\log x > 0$.

13Ex4P1G2E1 Risolvere la disequazione $\exp(\exp(x)) > 2$.

13Ex4P1G2E8 Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $0 \leq y \leq \sin x$.

13Ex4P1G3E1 Risolvere la disequazione $\log\log x > 1$.

13Ex4P1G3E8 Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $\cos x \leq y \leq 0$.

13Ex4P1G4E1 Risolvere la disequazione $\exp(\exp(x)) > 4$.

13Ex4P1G4E8 Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $\sin x \leq y \leq 0$.

Testi di esame del primo gruppo di esercitazioni: seconde parti
Risolvere i seguenti esercizi motivando accuratamente le risposte.

* 13Cprova1P2E1 a) Si disegnino i grafici delle funzioni:

$$f_1(x) := \sin\frac{\pi}{1+x^2}, \quad f_2(x) := \sin\frac{\pi}{\frac{6}{5}+x^2}, \quad f_3(x) := \sin\frac{\pi}{2+x^2}, \quad f_4(x) := \sin\frac{\pi}{6+x^2}.$$

b) Si determini il numero delle soluzioni di dell'equazione $f_k(x) = \frac{1}{2}$ per $k = 1, \ldots, 4$.

- Quali sono i domini delle funzioni definite dalle seguenti espressioni?

$\sqrt{x-4}$, $\sqrt{|x-4|}$, $\sqrt{|x|-4}$, $\sqrt{x^2-4}$

$\log\sqrt{1+x}$, $\sqrt{\log(1+x)}$, $\log(1-\sqrt{x})$, $\sqrt{\log\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$

$\frac{x^2-1}{x-1}$, $x+1$, $\frac{x^2-2x+1}{x-1}$, $\frac{1}{1+\lg x}$.

- Risolvere le seguenti equazioni

$x^2+3x+2=0$, $x^3-5x^2-x+5=0$,

$\frac{\sin x}{\sqrt{(8-x)(10-x)}}=0$, $\frac{\sin x}{\log(x-7)}=0$,

$\tan x+\sin 2x=4\sin x$, $\sqrt{x^2+1}-1=\sqrt{x^2-1}$.

- Risolvere le seguenti disequazioni

$|x-1|>3$, $x^2+6x+5<0$, $\frac{x^2+x+1}{x-1}>0$

$\frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x+1}<0$, $\sqrt{x+1}-\sqrt{6x+2}+\sqrt{x+3}>0$

$\frac{x-1}{x+1}\leq\frac{x-2}{x+2}$, $\begin{cases} x+y>0 \\ y-x>0 \end{cases}$, $\log(x^2+6x+5)>0$

$\frac{\sin x}{\log(x-7)}>0$, $\sin x>\frac{1}{2}$, $\sin(x^2)<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2\cos^2 x+\sin 2x\geq 1$.

- Si determini la distanza dei punti di coordinate cartesiane (x,y) che verificano l'equazione $3x-2y+1=0$ dal punto di coordinate $(1,1)$.

- Descrivere il seguente $\{x\in\mathbb{R}: \frac{3x-1}{x+1} > 0\}$ in termini di unioni, intersezioni, differenze di insiemi definiti da equazioni o disequazioni di primo grado.

- Esprimere l'insieme delle soluzioni di $\frac{3x-1}{x+1} \geq 0$, $x\in\mathbb{R}$ in termini di unioni di intervalli (segmenti e semirette).

<u>NOTA</u> $A\cap C = \{x\in C ; x\in A\}$, $\phi = \{x\in C : x\neq x\}$

<u>NOTA</u> Se $\mathcal{A}(x)$, $\mathcal{B}(x)$ sono proprietà (di cui si può dire se sono vere o false per gli elementi x di un insieme C) definendo

$A = \{x\in C : \mathcal{A}(x)$ è vera$\}$ $B = \{x\in C : \mathcal{B}(x)$ è vera$\}$

si ha

$A\cup B = \{x\in C : \mathcal{A}(x)$ è vera $\boxed{o}$ (anche) $\mathcal{B}(x)$ è vera$\}$

$A\cap B = \{x\in C : \mathcal{A}(x)$ " $\boxed{e}$ $\mathcal{B}(x)$ " $\}$

$A\setminus B = \{x\in C : \mathcal{A}(x)$ " $\boxed{\text{e non}}$ $\mathcal{B}(x)$ " $\}$

- Si consideri la proposizione: "Se piove allora esco e uso l'ombrello", a quali delle seguenti corrisponde la sua negazione logica:

"Se non piove allora o non esco o non uso l'ombrello",

"Se non esco usando l'ombrello allora non piove",

"Piove ed esco senza usar l'ombrello",

"Piove e o sto in casa o non uso l'ombrello",

"Se non esco o non uso l'ombrello allora non piove".

- Si scriva in simboli la proposizione:
  " Per ogni λ più grande di 3 l'equazione $3\lambda x = 0$ ha almeno una soluzione".
  Si neghi la formula ottenuta, e usando le regole sui quantificatori e sui connettivi si trasformi tale negazione. Infine si "ritraduca" a parole quanto ottenuto.

- Partendo dai grafici delle funzioni elementari si disegnino i grafici delle seguenti funzioni

  $f(x) = \frac{x-1}{x-1} - 1$, $f(x) = \sqrt{x^2}$, $f(x) = 3x-2$

  $f(x) = x^2 - 2x$, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2-1}$, $f(x) = \sqrt{x-1}$

  $f(x) = \sqrt{2x-1}$, $f(x) = 2\sqrt{x-1}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3}$

  $f(x) = \log(x-1)$, $f(x) = \log|x-1|$, $f(x) = \log(|x|-1)$

  $f(x) = |\log(x-1)|$, $f(x) = e^{x+1} - 1$, $f(x) = e^{3x+3} - 1$

  $f(x) = 3(e^{3x+1} - 1)$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$ [QUADRATURA]

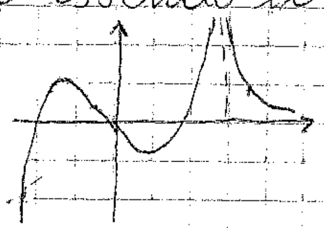
  $f(x) = \frac{x+2}{3x+4}$, $\frac{x+3}{2x+2}$

- Si disegnino approssimativamente i grafici delle funzioni calcolate da

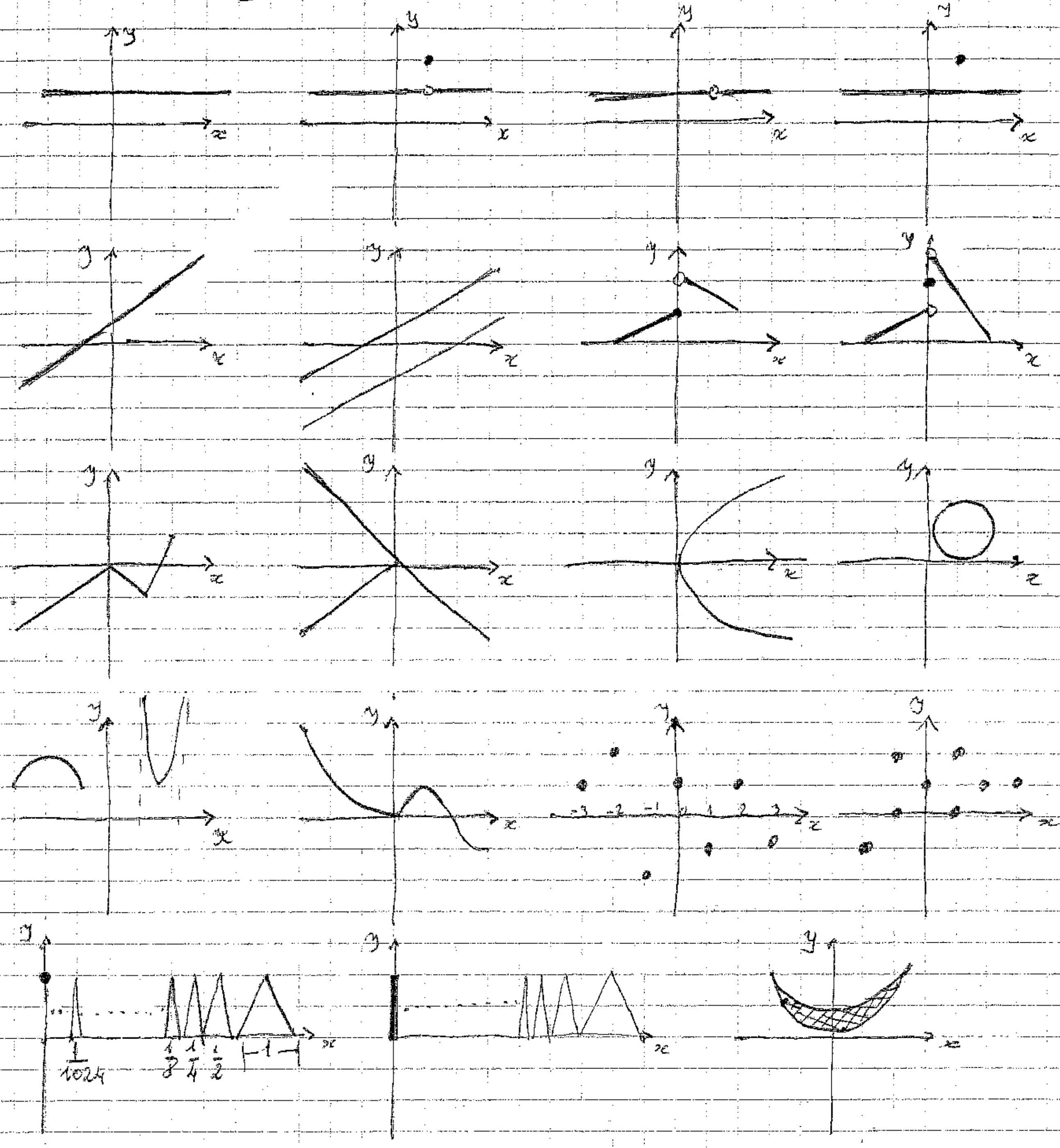
  $x^4 - 2x^2$, $(x-1)(x-3)(x-5)$, $||x+8|-3|$

  $\sin(2|x|)$, $\sin(4|x|)$, $\sin(x^2)$, $x^2 - 2|x|$.

- Si risolva graficamente $f(x) \geq x$ essendo il grafico di $y = f(x)$ il seguente



- Quali tra i seguenti disegni corrispondono a un grafico di funzione con valori reali y, di una variabile reale x [o punto mancante]



- Tra quelli che rappresentano una funzione si ricalchi il dominio, quindi l'immagine.

- Quali sono quelle iniettive?

II r pag. 4

* Disegnare i grafici delle seguenti funzioni sui domini "naturali"

$f(x) = \sin(\arcsin x)$, $f(x) = \cos(\arccos x)$

$f(x) = \cos(\arcsin x)$,

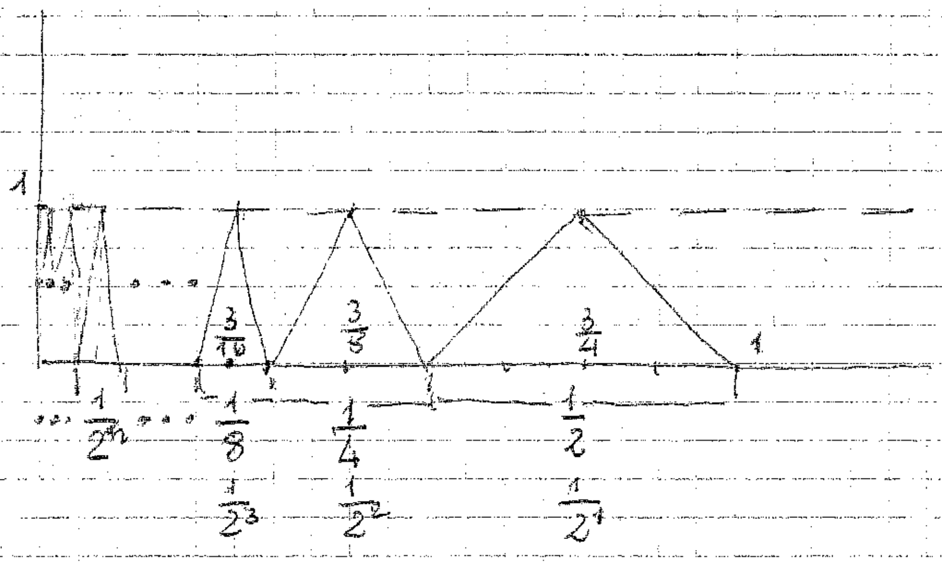
$f(x) = \arcsin(\sin x)$, $f(x) = \arccos(\cos x)$

* $f(x) = \arcsin(\cos x)$, $f(x) = \arccos(\sin x)$

[Suggerimento: $\arcsin(\sin x) = x$ per definizione solo se $|x| \le \frac{\pi}{2}$.

Si tratta di trovare R : $|R| \le \frac{\pi}{2}$ $\sin x = \sin R$.]

*



- Si determinino in generale gli estremi degli intervalli che sono basi dei triangoli
- Si determini il dominio della funzione il cui grafico è dato dal disegno
- Si scriva su ognuno dei predetti intervalli di base una formula che calcoli la funzione.

IT pag 5