Analisi Matematica I, Esercitazioni, Anno Accademico 2013 -2014, Ingegneria Gestionale
Tortorelli

LEGENDA

I principali testi e raccolte di esercizi a cui si fa riferimento in queste note sono:

[GGS] M.Ghisi, M. Gobbino, "Schede di Analisi Matetmatica"

[GGE] M.Ghisi, M. Gobbino, "Schede di Analisi Matetmatica"

[FM] A.Faedo, L.Modica, "Analisi I, lezioni"

[ABC] E.Acerbi, G. Buttazzo, "Analisi Matetmatica ABC 1: funzioni di una variabile"

Ogni gruppo di esercitzione è introdotto dagli esercizi pertinenti dei testi di esame degli anni passati, con i seguenti riferimenti:

AACnPNGMEm ovvero AAExnPNGMEm:

AA sono le ultime cifre dell'anno accademico,
C se si tratta di prove in itinere (compitini),
Ex se si tratta di testi di appelli,
P sta per 'parte dell'esame scritto',
E sta per esercizio,
n il numero del compitino o dell'appello,
N è il numero della parte dell'esame in questione(prima o seconda),
M è il numero del gruppo di versione del testo dello stesso esame
m il numero dell'esercizio.

Il corpo dei gruppi di esercitazione è composto da testi quasi tutti manoscritti con numerazione delle pagine indipendente, oltre ai dattiloscritti dei testi d'esame di cui sopra.

Inoltre con:
$*$ si indicano gli esercizi più impegnativi,
$\circ$ quelli di approfondimento o estensione e quelli più teorici.

IV GRUPPO DI ESERCITAZIONE, IVT: sviluppi di Taylor,
confronto di infiniti e infinitesimi, parti principali.

Manoscritto: A] pag. 1IVT Sviluppi di Taylor di base.
pagg. 1IVT-3IVT Sviluppi di Taylor con sostituzioni, limiti.
pag. 4IVT Sviluppi di Taylor e approssimazioni razionali.
B] pag. 5IVT Parti principali e ordini di infinito o infinitesimo.
Teoria relativa nei testi indicati e svolta a lezione

Testi di esame del quarto gruppo di esercitazioni: prime parti
Risolvere i seguenti esercizi senza dare dimostrazioni

13C2provaP1E7 Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $\sqrt{1+2x^3}$.

13C1P1G1E7 Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \exp(2x^3) - \exp(3x^2)$.

13C1P1G2E7 Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \log(1+3x^4) - \log(1+4x^3)$.

13C1P1G3E7 Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \cos(x^3) - \cos(x^2)$.

13C1P1G4E7 Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \exp(x^2) - \cos(x^2)$.

13Ex1P1G1E4 Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\log(1+x) - x$.

13Ex3P1G1E4 Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{x^4(x+4)}{\log(1+2x^3)}$.

13Ex3P1G2E4 Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{\log(1+3x^3)}{x^2(x+3)}$.

13Ex3P1G3E4 Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1-\exp(x^3)}{x(x+4)}$.

13Ex3P1G4E4 Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{x(x^2+3)}{1-\exp(x^2)}$.

Testi di esame del quarto gruppo di esercitazioni: seconde parti
Risolvere i seguenti esercizi motivando accuratamente le risposte.

13C2provaP2E2 a) Calcolare la parte principale di per $x \to +\infty$ di $\dfrac{e^{2/x}-1}{2x\sqrt{3+x}}$.

b) Per ogni $a \in \mathbf{R}$ calcolare la parte principale di per $x \to +\infty$ di $\dfrac{e^{2/x}-1}{2x\sqrt{3+x}} - x^a$.

13C1P2G1E1 Determinare la parte principale per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:
a) $\log(1-3x^2) + [\log(1-x)]^2$;
b) $\log(1-3x^2) + 3[\log(1-x)]^2$;
c) $\log(1-3x^3) - 3[\log(1-x)]^3$.

13Ex3P2G1E1 a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt[4]{\cos(4x)} - 1$.
b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt[4]{\cos(4x)} - 1 + 2x^2$.

13Ex3P2G2E1 a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt[3]{\cos(6x)} - 1$.
b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt[3]{\cos(6x)} - 1 + 6x^2$.

13Ex3P2G3E1 a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt{\cos(4x)} - 1$.
b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt{\cos(4x)} - 1 + 4x^2$.

13Ex3P2G4E1 a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt{\cos(2x)} - 1$.
b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt{\cos(2x)} - 1 + x^2$.

13Ex4P2G1E2 a) Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) := \frac{x}{(x^2-1)^2}.$$

b) Per ogni numero reale $a > 0$ dire quante sono le soluzioni x dell'equazione $f(x) = a$ che soddisfano $x \leq 2$.
c) Per ogni $a > 0$ indichiamo con $x(a)$ la più grande di tutte le soluzioni dell'equazione $f(x) = a$; determinare la parte principale di $x(a)$ per $a \to 0^+$.

A] SVILUPPI DI TAYLOR

- Memorizzare i seguenti sviluppi in $x_0 = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

- Negli sviluppi di sin, cos, artan, sinh, cosh di ordine dato sono scritti in realtà quelli di ordine rispettivamente:

  $2n+2, \; 2n+1, \; 2n+2, \; 2n+2, \; 2n+1$

  Mostrare anzi che i resti son rispettivamente:

  $O(x^{2n+3}), \; O(x^{2n+2}), \; O(x^{2n+3}), \; O(x^{2n+3}), \; O(x^{2n+2}) \quad x \to 0$

- Scrivere il resto in forma di Lagrange degli sviluppi in 0 di ordine n per:
  e^x, $\log(1+x)$, $\frac{1}{1+x}$

  di ordine $2n+2$ per $\sin x$, di ordine $2n+1$ per $\cos x$.

* Scrivere il resto dello sviluppo di ordine n in 0 per $\sin x$, e per $\cos x$

- Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 3 in $x_0 = 0$ per
  $f(x) = \log(1 + \sin(\log(1+x)))$
  [Usare gli sviluppi noti e l'unicità del polinomio di Taylor]

Risoluzione esercizio proposto:
polinomio di Taylor di ordine 3 per $x_0 = 0$ di

$\log(1 + \sin(\log(1+x)))$.

Si usa l'unicità del polinomio di Taylor.

$$\log(1 + \underbrace{\sin(\underbrace{\log(1+x)}_{z})}_{y})$$

se $x \to 0$
allora $z \to 0$
allora $y \to 0$

$z = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$y = \sin z = z - \frac{z^3}{6} + o(z^3)$

$z \sim x$ quindi $o(z^3) = o(x^3)$

$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$

$y \sim z \sim x$ quindi $o(y^3) = o(x^3)$

$$\log(1+y) = \left(z - \frac{z^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(z - \frac{z^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(z - \frac{z^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)$$

$$= z - \frac{z^3}{6} - \frac{1}{2}\left(z^2 + o(x^3)\right) + \frac{1}{3}\left(z^3 + o(x^3)\right) + o(x^3) =$$

$$= z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + o(x^3) =$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\left(x^2 - x^3 + o(x^3)\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + x^3 + o(x^3)$$

- Sviluppare in 0 all'ordine n specificato:

e^{x^2} $n=6$; e^{x-x^3} $n=4$; $\log(1+x^2-x^3)$ $n=6$;

$e^{\sin(x^2)}$ $n=6$; $e^{\sin x - x}$ $n=4$;

$\dfrac{e^x-1}{x}$ $n=7$; $(\sin x)^2 - x^2$ $n=5$

$\dfrac{1}{1+\log(1+x)}$ $n=2$; $(\sin x)^2 - \sin(x^2)$ $n=5$

- Per quali $a \in \mathbb{R}$ esiste finito

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(\tan x)^2 - x^2}{x^a} \quad ?$$

- Si approssimi in $\mathbb{Q}$ (cioè con numeri razionali) $\sqrt{e}$ per meno di 10^{-4}

- Si approssimi in $\mathbb{Q}$ $\sin\frac{1}{2}$ per meno di 10^{-4}

- a) Si mostri che il resto nella formula di Taylor di centro 0 e grado n per la funzione $\frac{1}{1-x}$ è $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ $(-1 < x < 1)$.

  b) Esprimere in modo analogo il resto per $\frac{1}{1+x}$

- a) Si approssimi in $\mathbb{Q}$ $\log\frac{9}{10}$ per meno di 10^{-4}.

  b) " " " $\log\frac{11}{10}$ " " .

* a) Il resto di Lagrange in 0 di grado n per $\log(1-x)$ si stima con $\left|\frac{x}{1-x}\right|^{n+1}\frac{1}{n+1}$ $(0 < x < 1)$.

* b) Per quali x è una stima utile

  c) Per $\log(1+x)$ la stima è $\frac{|x|^{n+1}}{n+1}$.

  d) Per quali x è utile?

* a) Posto $f(x) = \frac{x}{2-x} = y$ se ne studi il grafico.

  b) Si provi che $1-x = \frac{1-y}{1+y}$

  c) Si provi che se $0<x<1$ allora $f(x)<x$

  d) Si approssimi in $\mathbb{Q}$ $\log\frac{1}{2}$ per meno di 10^{-2}

B] Parti principali e ordini di infinitesimo

- a) Calcolare se esiste $\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^{\frac{\cos x}{x}}$

*b) Se L è il limite calcolare la parte principale di $\left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^{\frac{\cos x}{x}} - L \quad x \to 0$

- a) Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan \sin \tan 3x}{2x} = L$

b) Calcolare la parte principale di

$$\frac{\arctan \sin \tan 3x}{2x} - L \quad x \to 0$$

- Se $\square \to 0$ allora (p.p. : parte principale)

$$\square^A \, O(\square^B) = O(\square^{A+B}) \; ; \; \square^A \, o(\square^B) = o(\square^{A+B})$$

$$O(\square) = O(\text{p.p.} \square) \; ; \; o(\square) = o(\text{p.p.} \square)$$

- Calcolare la parte principale di

$$\log(5^x + 1) \quad x \to +\infty$$

b) Per quali a : $\lim_{x \to +\infty} \left[\log(5^x+1) - \text{p.p.}(\log(5^x+1)) \right] e^{ax} = 1$

[ABC4.44]. Per a, b l'infinitesimo per $x \to 0$

$$e^x - (1+x)^a + b \sin x$$

ha ordine massimo?