Analisi Matematica I, Esercitazioni, Anno Accademico 2013 -2014, Ingegneria Gestionale
Tortorelli

LEGENDA

I principali testi e raccolte di esercizi a cui si fa riferimento in queste note sono:

[GGS] M.Ghisi, M. Gobbino, "Schede di Analisi Matetmatica"

[GGE] M.Ghisi, M. Gobbino, "Schede di Analisi Matetmatica"

[FM] A.Faedo, L.Modica, "Analisi I, lezioni"

[ABC] E.Acerbi, G. Buttazzo, "Analisi Matetmatica ABC 1: funzioni di una variabile"

Ogni gruppo di esercitzione è introdotto dagli esercizi pertinenti dei testi di esame degli anni passati, con i seguenti riferimenti:

AACnPNGMEm ovvero AAExnPNGMEm:

AA sono le ultime cifre dell'anno accademico,
C se si tratta di prove in itinere (compitini),
Ex se si tratta di testi di appelli,
P sta per 'parte dell'esame scritto',
E sta per esercizio,
n il numero del compitino o dell'appello,
N è il numero della parte dell'esame in questione(prima o seconda),
M è il numero del gruppo di versione del testo dello stesso esame
m il numero dell'esercizio.

Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

Il corpo dei gruppi di esercitazione è composto da testi quasi tutti manoscritti con numerazione delle pagine indipendente, oltre ai dattiloscritti dei testi d'esame di cui sopra.

Inoltre con:
$*$ si indicano gli esercizi più impegnativi,
$\circ$ quelli di approfondimento o estensione e quelli più teorici.

V GRUPPO DI ESERCITAZIONE, VT: calcolo di primitive ed integrali.

Manoscritto: da A] a G]tavole sinottiche commentate, in H] esercizi, in F] esempi svolti di integrazione di funzioni razionali.
Altri esempi svolti e richiami di teoria nelle note di A.Massaccesi.

Teoria relativa nei testi indicati e svolta a lezione

Testi di esame del quinto gruppo di esercitazioni: prime parti
Risolvere i seguenti esercizi senza dare dimostrazioni

13C2P1G1E3 Determinare la primitiva $\displaystyle\int \frac{x^3}{\exp(x^4)}\,dx$.

13C2P1G1E4 Calcolare $\displaystyle\int_0^1 3x^2 \log x\,dx$.

13Ex1P1G1E5 Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3-2x}\,dx$.

13Ex2P1G1E4 Calcolare la primitiva $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx$.

13Ex2P1G2E4 Calcolare la primitiva $\displaystyle\int x^3 \log(2x)\,dx$.

13Ex2P1G3E4 Calcolare la primitiva $\displaystyle\int x^2 \log(3x)\,dx$.

13Ex2P1G4E4 Calcolare la primitiva $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$.

13Ex4P1G1E4 Calcolare la primitiva $\displaystyle\int 4x\cos(x^2)\,dx$.

13Ex4P1G2E4 Calcolare la primitiva $\displaystyle\int 4x\ \exp(x^2)\,dx$.

13Ex4P1G3E4 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)\,dx$.

13Ex4P1G4E4 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^2 2x\ \exp(x^2)\,dx$.

Testi di esame del quinto gruppo di esercitazioni: seconde parti
Risolvere i seguenti esercizi motivando accuratamente le risposte.

Analisi Matematica I per Ing. Gestionale 2013-2014

Quinto gruppo di esercitazioni V.M. Tortorelli V T

* Argomenti impegnativi.

Da A] a G] tavole sinottiche commentate

A] PRIMITIVE NOTEVOLI SU INTERVALLI

funzione	DOMINIO	Primitiva
e^x		$e^x + c$
$x^a,\ a \neq -1$	$x > 0$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$		$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x^{-n},\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$	$x \neq 0$	$\begin{cases} \frac{x^{-n+1}}{1-n} + c & x > 0 \\ \frac{x^{-n+1}}{1-n} + d & x < 0 \end{cases}$
$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$	$\begin{cases} \log x + c & x > 0 \\ \log x + d & x < 0 \end{cases}$
$\sin x$		$-\cos x + c$
$\cos x$		$\sin x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\lvert x \rvert < \frac{\pi}{2}$	$\tan x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$		$\operatorname{artan} x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$	$\operatorname{arsin} x + c$ $(-\arccos x + \tilde{c})$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$		$\log(x + \sqrt{1+x^2})$ $(\operatorname{arsinh} x)$

B] Teorema fondamentale

- Se f è continua su $[a,b]$ e $G' = f$ allora $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)}$
- Se si pone $F(x) =: \int_a^x f(t)\,dt$ allora $\exists\, F'(x) = f(x)$

C] Integrazione per parti

Se g è continua con g' su $[a,b]$, e f è continua con primitiva su $[a,b]$ F allora

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\,dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx}$$

quindi

$$\int^x f(t)g(t)\,dt = \int^x f(t)\,dt \cdot g(x) - \int^x \int^t f(s)\,ds \cdot g'(t)\,dt$$

* e.g. $\int^x \underset{f}{\sin\beta t}\, \underset{g}{e^{\alpha t}} = -\frac{\cos\beta x}{\beta} e^{\alpha x} + \frac{\alpha}{\beta}\int^x \underset{f}{\cos\beta t}\, \underset{g}{e^{\alpha t}}\,dt =$

$$= -\frac{\cos\beta x}{\beta} e^{\alpha x} + \frac{\alpha}{\beta^2}\sin\beta x\, e^{\alpha x} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int^x \sin\beta t\, e^{\alpha t}\,dt$$

quindi

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\int^x \sin\beta t\, e^{\alpha t}\,dt = \left(\frac{\alpha}{\beta^2}\sin\beta x - \frac{1}{\beta}\cos\beta x\right)e^{\alpha x}$$

$$\int^x \sin\beta t\, e^{\alpha t}\,dt = \frac{\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x}{\alpha^2 + \beta^2}\, e^{\alpha x}$$

D] Sostituzione

Se f è continua su $[a,b]$ e φ lo è con la sua derivata

$$\boxed{\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx} \qquad \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ dx &= d\varphi = \varphi'(t)\,dt \end{aligned}$$

e.g. $\int_0^{\pi/2} (\sin t)^m \cos t\,dt \begin{cases} \varphi(t) = \sin t = x \\ f(x) = x^m \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}$

* e.g. $\int_0^A \sqrt{1-x^2}\,dx = \quad \begin{matrix} \varphi(t) = \cos t = x, \; 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ f(x) = \sqrt{1-x^2} \end{matrix} \quad -\int_{\pi/2}^{\arccos A} (\sin t)^2\,dt = -\int_{\pi/2}^{\arccos A} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$

$1 \ge A \ge 0$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\arccos A} (t - \sin t\cos t)'\,dt = -\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\arccos A} \left(t - \sqrt{1-\cos^2 t}\,\cos t\right)'\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{1-A^2}\cdot A - \arccos A}{2} + \frac{\pi}{4}$$

E] Formule ricorsive

$$\int^x (\log t)^n dt = x(\log x)^n - n\int^x (\log t)^{n-1} dt \qquad n>0$$

$$\int^x e^t t^n dt = e^x x^n - n\int^x e^t t^{n-1} dt \qquad n>0$$

$$\int^x t^n \sin t\, dt = -x^n \cos x + n\int^x t^{n-1}\cos t\, dt$$

$$= -x^n\cos x + n x^{n-1}\sin x - n(n-1)\int^x t^{n-2}\sin t\, dt$$

$$\int^x t^k (\log t)^n dt = \frac{x^{k+1}}{k+1}(\log x)^n - \frac{n}{k+1}\int^x t^{k+1}(\log t)^{n-1} dt$$

F] <u>Funzioni razionali di base</u>

$$\int^x \frac{t}{(1+t^2)^n} dt \underset{d(1+x^2)=2dx}{=} \frac{1}{2}\int^{1+x^2}\frac{dy}{y^n} = \begin{cases} \frac{1}{2}\log(1+x^2) & n=1 \\ -\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} & n>1 \end{cases}$$

$$\int^x \frac{dt}{t^n} \overset{t>0}{=} \begin{cases} \log x & n=1 \\ -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} & n>1 \end{cases} \qquad \text{e.g.} \int \frac{dt}{a^2t^2+bt+1} =$$

$$\int^x \frac{dt}{1+x^2} = \arctan x =: I_1$$

$$* \quad I_{n+1} = \int^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \int\left(\frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\right)dt =$$

$$= I_n + \int^x \underset{f}{\frac{-t}{(1+t^2)^{n+1}}}\,\underset{g}{t}\, dt = I_n + \underset{F}{\frac{1}{2n(1+x^2)^n}}\,\underset{g}{x} - \frac{1}{2n}\int^x \underset{F\quad g'=1}{\frac{dt}{(1+t^2)^n}}$$

$$= \left(1-\frac{1}{2n}\right)I_n + \frac{x}{2n(1+x^2)^n} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{x}{2n(1+x^2)^n}$$

G] Alcune funzioni con primitive non esprimibili in modo diretto

$$\frac{1}{\sqrt{a_0+\dots+a_nx^n}} \quad n>2; \quad \sqrt{a_0+\dots+a_nx^n} \quad n>2; \quad \frac{e^x}{x}; \quad e^{x^2}$$

$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{\sqrt{\cos\alpha - \cos x}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \quad 0<k^2<1$$

H] Esercizi

• 1 Si calcolino le primitive delle seguenti funzioni sui domini naturali

$\sin(2x+1)$, e^{3x-5} , $\log x$, $\log(\pi-\sqrt{2}x)$

$x\cos x+\sin x$, $e^{x}(\sin x+\cos x)$, $\frac{1}{\sin 2x}$, $x5^{x^2}$

xe^{x^2} , $\frac{e^x}{1+e^x}$, $\frac{x}{1+x^4}$, $\frac{3x+1}{6x-3}$, $\frac{1}{t^2-1}$

• 2 Si calcolino i seguenti integrali

$$\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{x}{2}\,dx\ ,\quad \int_0^5\frac{\log(3x+1)}{3x+1}\,dx\ ,\quad \int_0^6\frac{4x-2}{2x+1}\,dx$$

$$\int_1^2\frac{t^2}{1+t^2}\,dt\ ,\quad \int_1^2\frac{1}{t^2+t+1}\,dt\ ,\quad \int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x}{1+(\cos x)^2}\,dx\ ,$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin 2x}{1+(\cos x)^2}\,dx\ ,\quad \int_1^2 e^{3x}\cos 2x\,dx\ ,\quad \int_0^1 e^{2x}(\sin x)^2\,dx$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4}(\operatorname{tg}x)^2\,dx\ ,\quad \int_2^3\frac{x^2+1}{x^2-x}\,dx\ ,\quad \int_1^2\frac{dx}{e^{2x}-e^x}$$

• 3 Si calcolino le primitive delle seguenti funzioni sui domini e con le condizioni specificate:

* $F(x)=\int^x \arctan t\,dt$ $\quad F(0)=1$ $\quad$ • $F(x)=\int^x\frac{1}{a^2t^2+bt+1}\,dt$

- $F(x)=\int^x\frac{2t^3-1}{t^2-3}\,dt$ $\quad t>3$ $\quad$ - $F(x)=\int^x\frac{1}{t^3+t}\,dt$ $\quad t>0$

- $F(x)=\int^x\frac{1}{t^3+1}\,dt$ $\quad t>0$ $\quad$ - $F(x)=\int^x\frac{t^2}{t^3+1}\,dt$ $\quad t>0$

• 4 Si calcolino i seguenti integrali

$\frac{1}{2}\int_0^2 \sin \sqrt[3]{t}\, dt \quad [\, y=\sqrt[3]{t} \quad dy=\frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt \,]$

$\int_0^1 e^{\sqrt{x+1}}\, dx \; , \; * \int_0^1 \arctan(x^2)\, dx ,$

$\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\, dt \; , \; \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt \; , \; * \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx$

$\left(x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} , \operatorname{arcsinh} y \right.$

$\left. \sqrt{1+x^2} = \frac{e^y + e^{-y}}{2} , \operatorname{arccosh} y \right)$

$\int_e^{e^2} \sin \log x \, dx ,$

• 5 Si mostri usando i grafici delle integrande che

$\int_0^{2\pi} (\cos x)^2 dx = \int_0^{2\pi} (\sin x)^2 dx$

Si deduca quindi il valore di $\int_0^{2\pi} (\cos x)^2 dx$.

• 6. Si stimi $\int_{-1}^{1} 2^{-x^2} dx$ confrontandolo con somme di aree di rettangoli ed errore al più $\frac{1}{2}$.

- Si stimi lo stesso integrale usando lo sviluppo di Taylor in $y=0$ di e^y

• 7 Si trovi lo sviluppo di Taylor di $\arctan x$, $x=0$ a partire da quello di $\frac{1}{1+x^2}$ sua derivata

F] Esempi del metodo per integrare funzioni razionali riducendosi a razionali di base

- $\int^x \frac{dt}{1-t^2}$, $t>1$ $\quad \underbrace{\frac{1}{1-t^2}}_{\text{DUE RADICI REALI}} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right\} \overset{t>1}{=} \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right\}$

$$\int^x \frac{dt}{1-t^2} \overset{t>1}{=} \log\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

- $\int^x \frac{dt}{3t^2+3t+1}$ $\quad \frac{1}{3t^2+3t+1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{t^2+t+1/3} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{t^2+2\frac{1}{2}t+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^2} =$

NESSUNA RADICE REALE = SOMMA DI POSITIVI

$$= \frac{1}{3}\,\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}} =$$

$$= \frac{12}{3}\,\frac{1}{\left(\sqrt{12}\,t+\frac{\sqrt{12}}{2}\right)^2+1}$$

$$\int^x \frac{dt}{3t^2+3t+1} = \frac{12}{3}\int^x \frac{dt}{\left(\sqrt{12}\,t+\frac{\sqrt{12}}{2}\right)^2+1} \underset{\substack{\sqrt{12}t+\frac{\sqrt{12}}{2}=y \\ \sqrt{12}\,dt=dy}}{=} \frac{\sqrt{12}}{3}\int^{\sqrt{12}x+\frac{\sqrt{12}}{2}} \frac{dy}{y^2+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{12}}{3}\,\mathrm{artan}\left(\sqrt{12}\,x+\frac{\sqrt{12}}{2}\right)$$

- $\int^x \frac{dt}{1+t^4}$ $\quad \frac{1}{1+t^4}$

NESSUNA RADICE REALE PER ESPRIMERLO COME PRODOTTO DI $(\alpha t+\beta)^2+\gamma^2$ (somma di positivi) CONVIENE FATTORIZZARE IN CAMPO COMPLESSO E ASSOCIARE I MONOMI DI RADICI CONIUGATE

$$(1+t^4) = (1-(it^2)^2) = (1-it^2)(1+it^2) = -\left(\frac{1}{i}-t^2\right)\left(\frac{1}{i}+t^2\right) =$$

$$= (t^2+i)(t^2-i) = \left(t-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(t-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(t-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(t-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$= \left[\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\left[\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right] \qquad z\bar{z} = \underbrace{(\mathrm{Re}\,z)^2}_{t\mp\frac{1}{\sqrt{2}}} + \underbrace{(\mathrm{Im}\,z)^2}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\frac{1}{1+t^4} = \frac{1}{\left[\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\left[\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right]} = \frac{At+B}{\left[\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right]} + \frac{Ct+D}{\left[\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right]}$$

PER RIDURSI A SOMMA DI RAZIONALI DI BASE, TROVARE A, B, C, D.

IT pag 6

$$\frac{1}{\left[(t+\frac{1}{\sqrt2})^2+\frac{1}{2}\right]\left[(t-\frac{1}{\sqrt2})^2+\frac{1}{2}\right]} = \frac{At+B}{\underbrace{(t+\frac{1}{\sqrt2})^2+\frac{1}{2}}_{t^2+\frac{2}{\sqrt2}t+1}} + \frac{Ct+D}{\underbrace{(t-\frac{1}{\sqrt2})^2+\frac{1}{2}}_{t^2-\frac{2}{\sqrt2}t+1}}$$

$$\frac{1}{[\cdots][\cdots]} = \frac{\overset{3}{\widehat{At^3}}-\frac{2}{\sqrt2}\overset{2}{\widehat{At^2}}+\widehat{At}+\widehat{Bt^2}-\frac{2}{\sqrt2}\widehat{Bt}+\check{B}+\widehat{Ct^3}+\frac{2}{\sqrt2}\widehat{Ct^2}+\widehat{Ct}+\widehat{Dt^2}+\frac{2}{\sqrt2}\widehat{Dt}+\check{D}}{[\cdots]\cdot[\cdots]}$$

$$\frac{\overset{3}{\widehat{0}}\cdot t^3+\overset{2}{\widehat{0}}\cdot t^2+\overset{1}{\widehat{0}}\cdot t+\overset{0}{\check{1}}}{[\cdots]\cdot[\cdots]} = \frac{\overbrace{(A+C)}^{3}t^3+\overbrace{(-\frac{2}{\sqrt2}A+B+\frac{2}{\sqrt2}C+D)}^{2}t^2+\overbrace{(A-\frac{2}{\sqrt2}B+C+\frac{2}{\sqrt2}D)}^{1}t+\overset{0}{B+D}}{[\cdots][\cdots]}$$

per trovare A, B, C, D si impone che i numeratori siano eguali quindi per il <u>principio di identità dei polinomi</u> si impone che i coefficienti dei termini di egual grado dei numeratori siano eguali:

$$\begin{aligned}
0 &= A+C \longrightarrow A=-C \\
0 &= -\tfrac{2}{\sqrt2}A+B+\tfrac{2}{\sqrt2}C+D \longrightarrow 0=-\tfrac{2}{\sqrt2}A+B-\tfrac{2}{\sqrt2}A+B \longrightarrow \\
0 &= A-\tfrac{2}{\sqrt2}B+C+\tfrac{2}{\sqrt2}D \longrightarrow 0=-\tfrac{2}{\sqrt2}B+\tfrac{2}{\sqrt2}D \longrightarrow B=D \\
1 &= B+D \longrightarrow B=\tfrac{1}{2} \longrightarrow
\end{aligned}$$

$\longrightarrow A=\frac{1}{\sqrt2}B=\frac{1}{2\sqrt2}\quad B=D=\frac{1}{2}\quad C=-\frac{1}{2\sqrt2}$. Quindi:

$$\frac{1}{1+t^4} = \frac{\frac{1}{2\sqrt2}t+\frac{1}{2}}{(t+\frac{1}{\sqrt2})^2+\frac{1}{2}} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt2}t+\frac{1}{2}}{(t-\frac{1}{\sqrt2})^2+\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\,\frac{\frac{1}{2\sqrt2}t+\frac{1}{2}}{(\sqrt2 t+1)^2+1} - \frac{1}{\sqrt2}\,\frac{t-\sqrt2}{(\sqrt2 t-1)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt2 t+1}{(\sqrt2 t+1)^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(\sqrt2 t+1)^2+1} - \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt2 t-1}{(\sqrt2 t-1)^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(\sqrt2 t-1)^2+1}$$

$$\begin{matrix} Y=\sqrt2 t+1 \\ Z=\sqrt2 t-1 \end{matrix} = \frac{1}{2}\,\frac{Y}{Y^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{Y^2+1} - \frac{1}{2}\,\frac{Z}{Z^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{Z^2+1} \qquad \begin{matrix} dY=\sqrt2\,dt \\ dZ=\sqrt2\,dt \end{matrix}$$

Integrali di funzioni razionali ed esempi

Annalisa Massaccesi

15 novembre 2012

1 Esempi notevoli

1. Calcolare una primitiva della funzione $f(x) := \frac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$.

   Vorremmo ricondurci ad un caso più semplice da trattare, quello di una somma di funzioni del tipo $\tilde{f}(x) = \frac{c}{ax+b}$, con $a \neq 0$, la cui primitiva[1] è $\tilde{F}(x) = \frac{c}{a}\log(ax+b)$.

   Innanzitutto "lavoriamo" sull'integranda $f(x)$ per ricondurci a $\tilde{f}(x)$. Fattorizziamo il denominatore, sicché
   $$f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)}.$$
   A questo punto imponiamo che $f(x)$ sia della forma $\frac{c_1}{1-x} + \frac{c_2}{1+x}$, per qualche costante $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, e calcoliamo c_1, c_2. Infatti
   $$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)(1-x)} &= \frac{1}{1-x^2} = f(x) = \frac{c_1}{1-x} + \frac{c_2}{1+x} \\ &= \frac{c_1(1+x) + c_2(1-x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{(c_1-c_2)x + (c_1+c_2)}{(1+x)(1-x)}\end{aligned}$$
   se e solo se
   $$(c_1 - c_2)x + (c_1 + c_2) = 1,$$
   cioè dobbiamo risolvere il sistema lineare
   $$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$$
   che ha per soluzione $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$. Abbiamo quindi ottenuto
   $$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x}.$$
   A questo punto è facile risolvere l'integrale
   $$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\log(1-x) + \frac{1}{2}\log(1+x) = \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).\end{aligned}$$

[1] Tutto questo viene fatto in un intervallo in cui $\log(ax+b)$ è definito, cioè con $x > -\frac{b}{a}$.

2. Calcolare una primitiva della funzione $f(x) := \frac{1}{1+x^4}$.

   Come prima, vorremmo ricondurci ad un caso più semplice da trattare: quello di una somma di funzioni del tipo $\tilde{f}(x) = \frac{c}{ax+b}$ (vedi sopra) e di funzioni del tipo $\hat{f}(x) = \frac{c}{1+x^2}$, la cui primitiva è $\hat{F}(x) = c\arctan(x)$.

   Per la fattorizzazione di $1 + x^4$ e la decomposizione in fratti semplici, si vedano gli appunti di Tortorelli.

2 Un po' di teoria

Tutte le funzioni razionali[2] si possono ricondurre all'integrazione di fratti semplici, cioè di funzioni del tipo

$$\frac{c}{(ax+b)^n} \quad \text{oppure} \frac{ax+b}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^n}, \tag{1}$$

di cui conosciamo già le primitive. Riassumendo:

- sappiamo che le funzioni razionali sono sempre integrabili (lontano dai punti di singolarità);
- vogliamo mettere a punto un algoritmo per scrivere una funzione razionale come somma di fratti semplici e, eventualmente, di un polinomio $M(x)$ (mediante operazioni algebriche);
- bisogna ricordare quali siano le primitive dei fratti semplici in (??) e fare i conti (mediante teoria dell'integrazione).

Per scrivere una funzione razionale come somma di fratti semplici si seguono i passi qui sotto.

1. Ci si riconduce al caso $\deg Q > \deg P$: se questo è già vero per la funzione razionale assegnata, allora non c'è niente da fare in questo passo. Se invece $\deg Q \leq \deg P$, allora si fa una divisione tra polinomi e si scrive $P(x) = M(x)Q(x) + R(x)$ con $\deg R < \deg Q$. Avremo ottenuto che

   $$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \text{con } \deg R < \deg Q,$$

   cioè l'integranda si scrive come somma di un polinomio[3] e di una funzione razionale in cui il grado del polinomio a denominatore è strettamente minore del grado del polinomio al numeratore, come volevamo.

2. Si fattorizza $Q(x)$: è noto che qualsiasi polinomio a coefficienti reali si può scrivere come prodotto di fattori del tipo $(x-\lambda)^m$, in corrispondenza di una radice reale λ di molteplicità m, e del tipo $((x-\alpha)^2+\beta^2)^m$, in corrispondenza di due radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ di molteplicità m. Negli esempi sopra, infatti

   $$(1-x^2) = (1+x)(1-x) \quad \text{e} \quad 1+x^4 = \left(\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right)\left(\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right).$$

[2] Per funzioni razionali intendiamo tutte le funzioni che si possono scrivere come rapporto di polinomi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

[3] Integrare un polinomio è una cosa molto semplice!

2. Calcolare una primitiva della funzione $f(x) := \frac{1}{1+x^4}$.

   Come prima, vorremmo ricondurci ad un caso più semplice da trattare: quello di una somma di funzioni del tipo $\tilde{f}(x) = \frac{c}{ax+b}$ (vedi sopra) e di funzioni del tipo $\hat{f}(x) = \frac{c}{1+x^2}$, la cui primitiva è $\hat{F}(x) = c\arctan(x)$.

   Per la fattorizzazione di $1 + x^4$ e la decomposizione in fratti semplici, si vedano gli appunti di Tortorelli.

2 Un po' di teoria

Tutte le funzioni razionali[2] si possono ricondurre all'integrazione di fratti semplici, cioè di funzioni del tipo

$$\frac{c}{(ax+b)^n} \quad \text{oppure} \frac{ax+b}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^n}, \tag{1}$$

di cui conosciamo già le primitive. Riassumendo:

- sappiamo che le funzioni razionali sono sempre integrabili (lontano dai punti di singolarità);
- vogliamo mettere a punto un algoritmo per scrivere una funzione razionale come somma di fratti semplici e, eventualmente, di un polinomio $M(x)$ (mediante operazioni algebriche);
- bisogna ricordare quali siano le primitive dei fratti semplici in (??) e fare i conti (mediante teoria dell'integrazione).

Per scrivere una funzione razionale come somma di fratti semplici si seguono i passi qui sotto.

1. Ci si riconduce al caso $\deg Q > \deg P$: se questo è già vero per la funzione razionale assegnata, allora non c'è niente da fare in questo passo. Se invece $\deg Q \leq \deg P$, allora si fa una divisione tra polinomi e si scrive $P(x) = M(x)Q(x) + R(x)$ con $\deg R < \deg Q$. Avremo ottenuto che

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \text{con } \deg R < \deg Q,$$

   cioè l'integranda si scrive come somma di un polinomio[3] e di una funzione razionale in cui il grado del polinomio a denominatore è strettamente minore del grado del polinomio al numeratore, come volevamo.

2. Si fattorizza $Q(x)$: è noto che qualsiasi polinomio a coefficienti reali si può scrivere come prodotto di fattori del tipo $(x-\lambda)^m$, in corrispondenza di una radice reale λ di molteplicità m, e del tipo $((x-\alpha)^2+\beta^2)^m$, in corrispondenza di due radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ di molteplicità m. Negli esempi sopra, infatti

$$(1-x^2) = (1+x)(1-x) \quad \text{e} \quad 1+x^4 = \left(\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)\left(\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right).$$

[2] Per funzioni razionali intendiamo tutte le funzioni che si possono scrivere come rapporto di polinomi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

[3] Integrare un polinomio è una cosa molto semplice!

3. Si associa a $\frac{P(x)}{Q(x)}$ una decomposizione in fratti semplici parametrizzata da alcune costanti, i.e.

$$\begin{aligned}
\frac{P[x]}{Q[x]} = \; & \frac{c_{1,1}}{x-\lambda_1} + \frac{c_{1,2}}{(x-\lambda_1)^2} + \cdots + \frac{c_{1,r_1}}{(x-\lambda_1)^{m_1}} + \\
& + \cdots + \\
& \frac{c_{k,1}}{x-\lambda_k} + \frac{c_{k,2}}{(x-\lambda_k)^2} + \cdots + \frac{c_{k,r}}{(x-\lambda_k)^{m_k}} + \\
& \frac{a_{1,1}x + b_{1,1}}{(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{a_{1,2}x + b_{1,2}}{((x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2)^2} + \cdots + \frac{a_{1,s_1}x + b_{1,s_1}}{((x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{s_1}} + \\
& + \cdots + \\
& \frac{a_{l,1}x + b_{l,1}}{(x-\alpha_l)^2 + \beta_l^2} + \frac{a_{l,2}x + b_{l,2}}{((x-\alpha_l)^2 + \beta_l^2)^2} + \cdots + \frac{a_{l,s_l}x + b_{l,s_l}}{((x-\alpha_l)^2 + \beta_l^2)^{s_l}}.
\end{aligned}$$

e poi si calcolano i coefficienti risolvendo un sistema lineare. Il sistema lineare scaturisce dall'imporre proprio l'uguaglianza nella prima riga sopra.

4. Si concludono i conti: nei casi particolari saranno più semplici che nel caso generale trattato qui sopra!