Analisi Matematica I, Esercitazioni, Anno Accademico 2013 -2014, Ingegneria Gestionale

Tortorelli

LEGENDA

I principali testi e raccolte di esercizi a cui si fa riferimento in queste note sono:

[GGS] M.Ghisi, M. Gobbino, "Schede di Analisi Matetmatica"

[GGE] M.Ghisi, M. Gobbino, "Schede di Analisi Matetmatica"

[FM] A.Faedo, L.Modica, "Analisi I, lezioni"

[ABC] E.Acerbi, G. Buttazzo, "Analisi Matetmatica ABC 1: funzioni di una variabile"

Ogni gruppo di esercitzione è introdotto dagli esercizi pertinenti dei testi di esame degli anni passati, con i seguenti riferimenti:

AACnPNGMEm ovvero AAExnPNGMEm:

AA sono le ultime cifre dell'anno accademico,
C se si tratta di prove in itinere (compitini),
Ex se si tratta di testi di appelli,
P sta per 'parte dell'esame scritto',
E sta per esercizio,
n il numero del compitino o dell'appello,
N è il numero della parte dell'esame in questione(prima o seconda),
M è il numero del gruppo di versione del testo dello stesso esame
m il numero dell'esercizio.

Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

Il corpo dei gruppi di esercitazione è composto da testi quasi tutti manoscritti con numerazione delle pagine indipendente, oltre ai dattiloscritti dei testi d'esame di cui sopra.

Inoltre con:
$*$ si indicano gli esercizi più impegnativi,
$\circ$ quelli di approfondimento o estensione e quelli più teorici.

VII GRUPPO DI ESERCITAZIONE, VIIT: integrali in senso generalizzato e integrali impropri.

Manoscritto: esercizi 1, 2: integrali impropri,
esercizi da 3 a 7: funzioni definite mediante integrali non elementari.
Studio della convergenza di alcuni integrali oscillanti nelle note di A. Massaccesi.

Teoria relativa nei testi indicati e svolta a lezione

Testi di esame del settimo gruppo di esercitazioni: prime parti
Risolvere i seguenti esercizi senza dare dimostrazioni

13C2P1G1E5 Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\sin(1/x^a)\, dx$ risulta essere finito.

13Ex2P1G1E5 Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a}{e^x}\, dx$ risulta essere finito.

13Ex2P1G2E5 Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin(x^a)}{x^{3a}}\, dx$ risulta essere finito.

13Ex2P1G3E5 Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a \sin\Big(\frac{1}{x^2}\Big) dx$ risulta essere finito.

13Ex2P1G4E5 Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^a}{x^2}\, dx$ risulta essere finito.

13Ex3P1G1E5 Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(2x)^2}\, dx$.

13Ex4P1G1E5 Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^a-2}{x^2+1} dx$ è finito.

13Ex4P1G2E5 Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a+3}{x^3+1} dx$ è finito.

13Ex4P1G3E5 Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^2-1}{x^a+2} dx$ è finito.

13Ex4P1G4E5 Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^a+3} dx$ è finito.

Testi di esame del settimo gruppo di esercitazioni: seconde parti
Risolvere i seguenti esercizi motivando accuratamente le risposte.

13C2P2G1E3 a) Fissato $a > 0$, tracciare un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) := \frac{1}{(1+x^4)^a}.$$

b) Sia A il *solido di rotazione* nello spazio ottenuto facendo ruotare il grafico di f attorno all'asse delle x. Tracciare un disegno approssimativo di A e dire per quali valori di a il volume è finito.

c) Sia B il solido di rotazione ottenuto facendo ruotare il grafico di f attorno all'asse delle y. Tracciare un disegno approssimativo di B e dire per quali valori di a il volume è finito.

13Ex1P2G1E2 a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \sqrt{x^6+1}$.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $x \geq 0$ e $x^3 \leq y \leq f(x)$.
c) Dire se l'area di A è finita o infinita.

13Ex2P2G1E2 Dato $a > 0$ si consideri l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{3x^3 - \log(1+3x^3)}{x^{2a}}\, dx.$$

a) Dire per quali a la funzione integranda converge ad un limite finito per $x \to 0^+$.
b) Spezzare questo integrale improprio in integrali impropri semplici e dire quindi per quali a esso esiste ed è finito.

13Ex3P2G1E2 a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \exp(x^3 - 3x)$.
b) Risolvere la disequazione $f(x) \leq e^{6x}$ e disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che

$$f(x) \leq y \leq e^{6x}.$$

c) Dire se l'area di A è finita o infinita.

13Ex3P2G3E2 a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \exp(x^3 - 3x)$.
b) Risolvere la disequazione $f(x) \leq e^{6x}$ e disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che

$$f(x) \leq y \leq e^{6x}.$$

c) Dire se l'area di A è finita o infinita.

Analisi Matematica I per Ing. Gestionale 2012-2013

Settimo gruppo di esercitazioni V. M. Tortorelli: VII T.

✱ Argomenti impegnativi o Domande di approfondimento o teoriche

1. Si studi la convergenza dei seguenti integrali

[GCE] Integrali impropri I pag 61 = ⊗,

⊗ $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$, ⊗ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2+x^2}$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$, $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)dx$

$\int_0^1 \log x\,dx$, $\int_0^1\frac{dx}{\log x}$, $\int_1^2\frac{dx}{\log x}$, $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\log x}$, $\int_0^{+\infty}(\sqrt{x^4+1}-x^2)dx$

⊗ $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\log x)^5}$, ⊗ $\int_1^2\frac{dx}{x(\log x)^5}$, ⊗ $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x(\log x)^5}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$, ⊗ $\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2}dx$, ⊗ $\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$, ⊗ $\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x}dx$

⊗ $\int_{27}^{+\infty}\frac{dx}{x(\log x)(\log(\log x))}$, ⊗ $\int_1^{+\infty}\frac{x^3-1}{x^4(\sqrt{x}-1)}dx$

⊗ $\int_0^{+\infty}\frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}(4^{\sqrt{x}}-1)}dx$, ⊗ $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{(\tan x)^4-1}{(\tan x)^{7/2}}dx$

$\int_0^{\pi/4}\frac{(\tan x)^4-1}{(\tan x)^{7/2}}dx$, ⊗ $\int_0^{+\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$,

$\int_0^{+\infty}(\sin x)^2dx$, ⊗ $\int_0^{+\infty}x|\sin(x^2)|dx$, $\int_0^1\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx$

$\int_0^1\frac{\sin x^2}{x}dx$, (✱ $\int_0^{+\infty}x\sin(e^x)\,dx$ da fare dopo es. 7)

[GGE] Int. impr. II - III pagg. 62, 63 = $\otimes$

[ABC] pagg 249 - 253 = Δ (nel caso compaiano parametri si discutano i diversi comportamenti)

$\otimes \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$, $\otimes \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4-1}$, $\otimes \int_0^{+\infty} \frac{3x\cos x}{10x^3+2x^6+1}\,dx$

$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx$, $\otimes \int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$, $\otimes \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$,

Δ 5.19 a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^x}$, Δ 5.19 d) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{ax}-\cos x}{x^a}\,dx$,

Δ 5.19 e) $\int_2^{+\infty} \frac{x^a}{(\log x)^{\log x}}\,dx$, * Δ 5.19 f) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^a|\sin x|}$

Δ 5.19 g) $\int_0^1 \left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^a dx$, Δ 5.19 l) $\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)dx$

$\otimes \int_3^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^2\sqrt{|\log x|}}\,dx$, $\otimes \int_1^3 \frac{\sin x^2}{x^2\sqrt{|\log x|}}\,dx$, $\otimes \int_0^{1/2} \frac{\sin x^2}{x^2\sqrt{|\log x|}}\,dx$,

$\otimes \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{|x^2-5x+6|}}\,dx$, $\otimes \int_3^{+\infty} \left(\sin\frac{1}{x}-\tan\frac{1}{x}\right)dx$

$\otimes \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}\,dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{\sqrt{x^2+1}-x}-1}$

3. [ABC] 5.4 Se $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{2f(x)-f(2x)}{x-f(x)}$

" 5.5 Calcolare la derivata di

$f(x)=\int_{2x}^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$, $f(x)=\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,dt$

" 5.6 Scrivere lo sviluppo di Taylor in 0:

$f(x)=\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,dt$, $f(x)=\sin\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)$

" 5.8 Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{x-\int_0^x (e^{-t^2}+\sin^2 t)\,dx}{x(x^2-\sin^2 x)}$

VII T pag 2

4. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \int_{2x}^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\int_{2x}^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}\int_{2x}^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_{2x}^{x^2}\frac{e^t}{t}\,dt}{\int_0^{x^2}\frac{e^t}{t}\,dt}$.

[ABC] 5.9

. Calcolare la parte principale $x\to 0$ di

$$\int_{x-\sin x}^{x^3} \frac{\log(1+t)}{1+t^2}\,dt$$

. Per quali $a, b, c \in \mathbb{R}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(ax+b\,e^x+c\int_0^x \frac{e^t}{t}\,dt\right)}{e^x}$

esiste finito

[ABC] 5.21 Calcolare se esite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{x+\frac{1}{x}} e^{-t^2}\,dt}{\int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt}$$

5. [ABC] 5.22 a) Studiare il grafico di $f(x)=\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t}\,e^t}\,dt$

" " b) $f(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \quad x>0$

6. Siano $f(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$, $g(x)=-\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,t\sin(xt)\,dt$

- Si provi che sono ben definite e continue. [Usare teo. Lagrange]

* - Si provi che $\exists f'(x)=g(x)$

- Si studi il grafico di f.

7. Si provi che $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ esiste finito.

*. Si provi che $\int_0^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}\,dt=+\infty$ (Cfr. NOTE MASSACCESI)

. Il volume del solido ottenuto ruotando il sottografico di $\frac{|\sin t|}{t}$ attorno all'asse delle ascisse di 2π è finito?

. Per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esiste $\int_0^{+\infty} t^\alpha \sin(t^\beta)\,dt$?

Integrale di $\sin t/t$ e varianti

Annalisa Massaccesi

30 novembre 2012

1 Integrale di $\sin t/t$

In riferimento all'es. 7 del VII gruppo di esercizi, come già visto ad esercitazione, vogliamo dimostrare che $\int_0^{+\infty} \sin t/t \, dt \in \mathbf{R}$.

Osservazione 1. Osserviamo innanzitutto che

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

essendo la derivata del seno in $t = 0$.
Dunque $\int_0^{\pi} \sin t/t$ non è un integrale improprio e d'ora in avanti ci occuperemo esclusivamente di

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt \, .$$

Semplifichiamo l'integrale con un passaggio per parti [1], con la scelta $f(t) = \sin t$ (la primitiva sarà $F(t) = -\cos t$) e $g(t) = 1/t$, ottenendo:

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = \left(-\frac{\cos t}{t}\right)\Big|_{t=\pi}^{t=+\infty} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} \, dt = -\frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} \, dt \, .$$

D'altra parte

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} \, dt \; \in \mathbf{R}$$

per il criterio di assoluta convergenza (infatti $\int_{\pi}^{+\infty} |\cos t| t^{-2} \, dt \le \int_{\pi}^{+\infty} t^{-2} \, dt < +\infty$) e posso concludere che

$$\exists \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt \in \mathbb{R} \, .$$

Nella seconda parte dell'appendice viene fornita un'altra soluzione, più complessa dal punto di vista della formalizzazione matematica - dunque più pesante alla lettura! - ma (forse) geometricamente più intuitiva e adattabile a provare la convergenza di integrali del tipo $\int \sin t \cdot g(t) dt$ con g decrescente infinitesima.

[1] Ricordo che nell'integrale per parti abbiamo fissato la seguente notazione: $f(t), g(t)$ sono le funzioni integrande, $F(t)$ ï¿½ una primitiva di $f(t)$, cioï¿½ $F'(t) = f(t)$ e il passaggio si riassume in $\int f(t)g(t) \, dt = F(t)g(t) - \int F(t)g'(t) \, dt$.

2 Integrale di $\sin^2 t/t$

Vogliamo dimostrare che

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\, dt = +\infty\,.$$

Ricordiamo che la primitiva[2] di $f(t) = \sin^2 t$ è: $\quad F(t) = -\frac{1}{2}(\sin t \cos t - t)\,.$
Perciò cercando di calcolare per parti $\int \sin^2 t/t\, dt$ otteniamo

$$\int \frac{\sin^2 t}{t}\, dt = -\frac{1}{2t}(\sin t \cos t - t) + \frac{1}{2}\int \frac{t - \sin t \cos t}{t^2}\, dt\,,$$

dunque, siccome $(1 - (\sin t \cos t)/t)|_{t=\pi}^{t=+\infty} = 0$, allora

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\, dt = \frac{1}{2}\left(\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t \cos t}{t^2}\, dt\right)\,.$$

Di nuovo, $\int_{\pi}^{+\infty} t^{-2} \sin t \cos t\, dt$ converge per il criterio della convergenza assoluta[3], dunque

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\, dt \sim \frac{1}{2}\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt = +\infty$$

Nella prima parte dell'appendice ho inserito una seconda soluzione, con una dimostrazione geometrica con l'argomento che si usa per calcolare l'integrale di $\sin^2 x$.

3 Integrale di $|\sin t|/t$

Grazie al lavoro fatto nella sezione 2, risolvere $\int_0^{+\infty} |\sin t|/t\, dt$ diventa molto facile. Infatti:

$$|\sin t| \le 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

moltiplicando ad ambo i membri per $|\sin t|$, otteniamo

$$\sin^2 t \le |\sin t| \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

A questo punto è immediato concludere che

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\, dt \ge \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\, dt \ge \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\, dt = +\infty\,.$$

4 Appendice I: integrale di $\sin^2 t/t$ "geometrico"

L'idea che vorrei esprimere è la seguente: vediamo $\sin^2 t/t$ come un pezzo dell'equazione

$$\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{t} = \frac{1}{t}\,,$$

[2] In caso di vuoti di memoria, la primitiva di $\sin^2 t$ si calcola per parti.
[3] Infatti è sempre vero che $|\sin t \cos t| \le 1$.

che è una mera uguaglianza trigonometrica. Per una sorta di "fiducia nella simmetria" tra seni e coseni intuiamo che $\int_\pi^{+\infty} \sin^2 t/t\,dt$ e $\int_\pi^{+\infty} \cos^2 t/t\,dt$ dovranno essere quasi uguali in particolare si comporteranno alla stessa maniera. Quindi poichè la loro somma $\int_\pi^{+\infty} 1/t\,dt = +\infty$, anch'essi eguali dovrebbero essere infiniti. In particolare dovrebbe essere $\int_\pi^{+\infty} \sin^2 t/t\,dt = +\infty$. Di seguito formalizzo questa idea.

Andiamo a vedere cosa accade per il coseno[4]:

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t}\,dt = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{t}\,dt = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{t+\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{t+\frac{\pi}{2}}{t}\,dt =$$
$$= \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{t+\frac{\pi}{2}}\,dt \;+\; \pi\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{2t^2+\pi t}\,dt =$$

quindi con il cambio di variabile $x = t + \pi/2$ si ottiene:

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t}\,dt = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \;+\; \pi\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{2t^2+\pi t}\,dt =$$
$$= \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \;-\; \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \;+\; \pi\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{2t^2+\pi t}\,dt$$

per confronto asintotico con $\frac{1}{t^2}$ l'ultimo addendo è convergente ad un numero, e il secondo addendo è un integrale ordinario; detta $C \in \mathbf{R}$ la loro somma si ha:

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t}\,dt = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt \;+\; C;$$

Concludendo

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt \;+\; \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t}\,dt \;-\; C\right] \;=\; \frac{1}{2}\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt \;-\; \frac{C}{2} \;=\; +\infty$$

5 Appendice II: integrale di $\sin t/t$ con le serie

Divido il dominio di integrazione $[\pi, +\infty)$ (in base all'osservazione 1, posso trascurare l'intervallo intorno a 0) in tanti domini di ampiezza 2π, per calcolare

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt\,.$$

Stimo dall'alto e dal basso

$$\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad k = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Essenzialmente sfrutterï¿½ soltanto il fatto che $1/t$ ï¿½ decrescente su $(0, +\infty)$. Infatti, negli intervalli in cui $\sin t$ ï¿½ negativo, posso stimare

$$\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \geq \frac{1}{(2k-1)\pi}\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \sin t\,dt = -\frac{2}{(2k-1)\pi}\,,$$

[4] Ricordiamo che $\cos t = \sin(t + \pi/2)$.

e

$$\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \leq \frac{1}{2k\pi}\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \sin t\,dt = -\frac{2}{2k\pi}\,.$$

Quindi

$$-\frac{2}{(2k-1)\pi} \leq \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \leq -\frac{2}{2k\pi}\,. \tag{1}$$

Analogamente, negli intervalli in cui $\sin t$ ï¿½ positivo, stimiamo

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \geq \frac{1}{(2k+1)\pi}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin t\,dt = \frac{2}{(2k+1)\pi}\,,$$

e

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \leq \frac{1}{2k\pi}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin t\,dt = \frac{2}{2k\pi}\,.$$

Perciï¿½

$$\frac{2}{(2k+1)\pi} \leq \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \leq \frac{2}{2k\pi}\,. \tag{2}$$

Sommando le stime (1) e (2) ottengo

$$\frac{2}{(2k+1)\pi} - \frac{2}{(2k-1)\pi} \leq \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \leq \frac{2}{2k\pi} - \frac{2}{2k\pi}\,,$$

cioï¿½

$$-\frac{4}{\pi(2k-1)(2k+1)} \leq \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \leq 0\,.$$

Siccome $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} < +\infty$, ottengo che

$$0 \geq \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt\right) \geq -\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} > -\infty\,.$$