Matematica, Anno Accademico 2003-2004, Scienze Geologiche
P. Acquistapace, V.M. Tortorelli

III foglio di esercizi: P.Acquistapace, V.M. Tortorelli
dal 21 ottobre 2003 al 23 ottobre 2003

Programma e materiale relativo al corso essere reperito in rete selezionando nella Pagina del Dipartimento la voce Materiale Didattico (http://WWW.dm.unipi.it/didactics/home.html) e quindi selezionando ALTRI CORSI DI LAUREA e Corso di laurea *****

ESERCIZIO n. 1 Dimostrare che il sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

è risolubile univocamente se e solo se risulta $ab' - ba' \neq 0$; in tal caso se ne scriva la soluzione (x, y).

ESERCIZIO n. 2 Determinare la retta passante per $(2, -1)$ e perpendicolare alla retta di equazione $4x - 3y + 12 = 0$.

ESERCIZIO n. 3 Determinare la retta passante per $(0, 0)$ e per il centro della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$.

ESERCIZIO n. 4 Si calcoli la distanza del punto $(-3, 2)$ dalla retta di equazione $4x-3y+12 = 0$.

ESERCIZIO n. 5 Si suddivida il segmento di estremi $(1, 2)$ e $(2, 1)$ in quattro parti di egual lunghezza mediante i tre punti P, Q, R. Si calcolino le coordinate di tali punti.

ESERCIZIO n. 6 Dati $P = (-2, 5)$ e $Q = (4, 13)$, trovare le coordinate di un punto R sul segmento PQ tale che $|P - R| = 2\ |Q - R|$.

ESERCIZIO n. 7 Sia $R = (2, 3)$ il punto medio del segmento PQ, ove $P = (7, 5)$. Determinare le coordinate di Q.

ESERCIZIO n. 8 Dimostrare che per ogni $P, Q \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$|P - Q|^2 = |P|^2 + |Q|^2 - 2\ P \bullet Q\ .$$

ESERCIZIO n. 9 Provare che il triangolo di vertici $(2, -1)$, $(4, 2)$ e $(5, 1)$ è isoscele.

ESERCIZIO n. 10 Provare che il triangolo di vertici $(-3, 3)$, $(-1, 3)$ e $(11, -1)$ è rettangolo.

ESERCIZIO n. 11 Calcolare la lunghezza della mediana uscente dal punto A relativa al triangolo ABC, ove $A = (-1, 1)$, $B = (0, -6)$, $C = (-10, -2)$.

ESERCIZIO n. 12 Scrivere l'equazione dell'asse del segmento di estremi $(0, 2)$ e $(2, 1)$ (l'asse di un segmento è il luogo dei punti che sono equidistanti dai vertici del segmento).

ESERCIZIO n. 13 Si provi che le rette di equazioni parametriche $X = P + tQ$, $t \in \mathbf{R}$ e $X = A + sB$, $s \in \mathbf{R}$ sono fra loro parallele se e solo se esiste $\lambda \in \mathbf{R}$, non nullo, tale che $Q = \lambda B$.

ESERCIZIO n. 14 Si provi che le rette di equazioni $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ sono fra loro parallele se e solo se esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che $a' = \lambda a$ e $b' = \lambda b$.

ESERCIZIO n. 15 Si provi che le rette di equazioni $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ sono fra loro perpendicolari se e solo se esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che $\lambda a = -b'$, $\lambda b = a'$.

ESERCIZIO n. 16 Si provi che le rette di equazioni $X = P + tQ$, $t \in \mathbf{R}$, e $ax + by + c = 0$ sono fra loro perpendicolari se e solo se i vettori Q e (a, b) sono proporzionali, e sono parallele se e solo se i vettori Q e $(b, -a)$ sono proporzionali.

ESERCIZIO n. 17 Si considerino i luoghi dei punti di $\mathbf{R}^2$ descritti dalle seguenti equazioni:

(i)	$x^2 + y^2 - 1 = 0,$	(v)	$x^2 + y^2 + xy = 0,$
(ii)	$x^2 + y^2 = 0,$	(vi)	$x^2 - y^2 = 0,$
(iii)	$x^2 + y^2 + 1 = 0,$	(vii)	$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0,$
(iv)	$x^2 + y^2 + 2xy = 0,$	(viii)	$(x^2 - 1)^2 + y^2 = 0,$

e si riconosca quale delle precedenti equazioni rappresenta:

(a)	nessun punto,	(d)	una retta,
(b)	un punto,	(e)	due rette,
(c)	due punti,	(f)	una circonferenza.

ESERCIZIO n. 18 Si verifichi che ogni angolo convesso è l'intersezione di due semipiani.

ESERCIZIO n. 19 Si provi che ogni triangolo in $\mathbf{R}^2$ è l'intersezione di tre semipiani.

ESERCIZIO n. 20 Si provi che ogni quadrilatero in $\mathbf{R}^2$ è l'intersezione di quattro semipiani.

ESERCIZIO n. 21 Verificare che gli insiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ |x| \le 1, \ |y| \le 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ |x| + |y| \le 1\}$$

sono quadrati; determinarne i vertici e le lunghezze dei lati.

ESERCIZIO n. 22 Siano $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $a^2 + b^2 = 1$. La funzione $R : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definita da

$$R(x, y) = (\xi, \eta), \qquad \xi = ax + by, \quad \eta = -bx + ay,$$

definisce una *rotazione* del piano (attorno all'origine). Si provi che:

(i) si ha $\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;

(ii) posto $U = R(1, 0)$, $V = R(0, 1)$, le rette per O, U e per O, V formano un sistema di coordinate ortogonali monometriche orientato positivamente;

(iii) posto $(\xi', \eta') = R(x', y')$, si ha $(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$ per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbf{R}^2$.

ESERCIZIO n. 23 Siano $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $a^2 + b^2 = 1$. La funzione $S : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definita da

$$S(x, y) = (\xi, \eta), \qquad \xi = ax + by, \quad \eta = bx - ay,$$

definisce una *simmetria* del piano (rispetto all'origine). Si provi che:

(i) si ha $\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;

(ii) posto $U = S(1, 0)$, $V = S(0, 1)$, le rette per O, U e per O, V formano un sistema di coordinate ortogonali monometriche orientato negativamente;

(iii) posto $(\xi', \eta') = S(x', y')$, si ha $(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$ per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbf{R}^2$.

ESERCIZIO n. 24 Si provi che se A, B sono vettori linearmente indipendenti in $\mathbf{R}^2$, allora per ogni $P \in \mathbf{R}^2$ esiste un'unica coppia di numeri reali λ, μ tali che $P = \lambda A + \mu B$.