# MATEMATICA

Anno Accademico 2005-2006

Scienze Geologiche

M.Novaga, V.M. Tortorelli

II prova in itinere, 30 gennaio 2006

---

I PARTE: si dia la risposta alle seguenti domande senza giustificazione

---

1 - Si calcolino seno e coseno dell'angolo tra
$\{(x,y,z): \ x^2+y^2=e^z \ \}$ e $\{(x,y,z): \ x^2+z^2=e^y \ \}$ in $(1,0,0)$.

R.: Poichè i due insiemi sono luoghi di zeri di funzioni con gradienti non nulli nel punto in considerazione, sono superfici in una palla attorno al punto. L'angolo tra di esse è l'angolo tra i piani tangenti, ovvero quello tra le normali ad essi. Ma la direzione normale ad un luogo di zeri è data dal gradiente, se non nullo:

$\nabla x^2+y^2-e^z=(2x,2y,-e^z)$, $\nabla x^2-e^y+z^2=(2x,-e^y,2z)$,
che in $(1,0,0)$ danno i vettori $(2,0,-1)$ e $(2,-1,0)$.
Poichè il coseno tra due vettori è dato dal prodotto scalare dei due diviso il prodotto delle loro norme, il coseno cercato è $\frac{4}{5}$
Poichè nello spazoio non vi è un'orientazione di riferimento per coppie di vettori si può solo determinare il modulo del seno $\frac{3}{5}$.

2- Si calcoli $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$.

R.: Usando il teorema fondamentale del calolo si tratta di calcolare la differenza agli estremi di una primitiva dell'integranda $f(x)$. Con la sostituzione

$x=t^2$ ci si riduce a trovare una primitiva di $2\frac{t^3+t}{1+t}=f(t^2)\frac{dx}{dt}$
Aggiungendo e togliendo 1 al denominatore due volte, e fattorizzando $t^3+1$, tale funzione è eguale a

$2(1-\frac{1}{1+t})+2(t^2-t+1-\frac{1}{1+t})$.
che ha primitiva $\frac{2}{3}t^3-t^2+4t-4\log(1+t)$, quindi la primitiva cercata è $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+4\sqrt{x}-4\log(1+\sqrt{x})$, e la sua differenza tra 2 ed 1 è :

$\frac{16}{3}\sqrt{2}-\frac{17}{3}-4\log\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

3- Quali tra le seguenti funzioni sono integrabili in senso generalizzato su $]0;+\infty[$: $\frac{1}{(\log x)^2}$, $\frac{\pi}{2}-\text{artan}x$,$\frac{\sin x}{x^2}$, $(\sin x^3)^2$.

R.: Nessuna.

La prima non è integrabile all'infinito poichè $(\log x)^2\leq x$ su una semiretta e $\frac{1}{x}$ nonè integrabile. La seconda ha sottografico sulla semiretta con area eguale a quella del sottografico della tangente su $[0;\frac{\pi}{2}[$ che con sostituzione $t=\cos x$ ha integrale che si riduce a quello di $\frac{1}{t}$ su $[1;+\infty[$: non integrabile. La terza non è integrabile poichè vicino a 0 si ha $\frac{\sin x}{x}\geq\frac{1}{2}$ e quindi la funzione sta sopra $\frac{x}{2}$ non integrabile vicino a 0. Sostituendo $x^3=y$ ci si riduce all'integrale di $\frac{(\sin y)^2}{y^{\frac{2}{3}}}$. L'integrale di tale funzione su $[n\pi;(n+1)\pi]$ è maggiore di $\frac{1}{(n+1)\pi}$ per l'integrale su tale intervallo di $\sin^2 y$ che però non dipende da $n$. Poiche la somma dei reciproci dei quadrati da una successione divergente anche la funzione ha integrale infinito.

4- Si trovi una soluzione dell'equazione dell'equazione $y''(t)+y(t)=e^t$.

R.: $\frac{e^t}{2}$

---

II PARTE: si risponda alla seguenti domande dando esaurienti giustificazioni

---

Determinare i punti di massimo e minimo della funzione

$$f(x,y,z) = xy + yz,$$

sull'insieme definito dalla diseguaglianza $x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1$.

R. Punti critici interni:

$\nabla f(x,y,z) = (y, x+z, y) = (0,0,0)$, e $x^2 + y^2 + 2z^2 < 1$
sono dati dal segmento $(x, 0, -x)$, $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Ma $f(x,0,-x) = 0$ e $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) < 0$, $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) > 0$: quindi i punti critici trovati non sono ne massimi ne minimi.
Poichè la funzione è continua su un limitato e chiuso deve assumere necessariamente un valore massimi e uno minimo, per cui questo dovrà essere assunto su $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$. Poichè il vincolo è descritto dal luogo di zeri di una funzione il cui gradiente non si annulla si può usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e cercare i punti di massimo e minimo tra le soluzioni $(x,y,z)$ del sistema :

$y = \mu x, \quad x + z = \mu y, \quad y = 2\mu z, \quad x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$

- poichè il caso $\mu = 0$ non dà punti di massimo o di minimo, si suppone $\mu \neq 0$
- eguagliando la prima e la terza e dividendo per $\mu$ si ottiene $x = 2z$
- moltiplicando in croce la prima e la seconda, dividendo per $\mu$ ed usando la precedente $y^2 = 6z^2$.

-usando la condizione di vincolo si ottiene $z = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$ Per ognuno di questi valori di $z$ il rispettivo valore di $x$ è $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Per ogni valore di $z$ invece corrispondono due valori di $y$ $\pm\sqrt{6}z$,

Quindi le soluzioni trovate sono $(x, 0, -x)$, $|x| = \sqrt{1}3$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$.
Calcolando $f$ in questi punti quelli che danno il minimo valore sono punti di minimo, quelli che danno il massimo valore punti di massimo. Quindi:
$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$, sono tutti i punti di massimo;
$(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$, sono tutti i punti di minimo.