

25 ottobre 2005

Definizione: - Si dice *rango* di una matrice il numero massimo per cui una sottomatrice quadrata con tale dimensione ha determinante non nullo.

Definizione: Se $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ è una matrice con m righe ed n la *matrice trasposta* è $(a_{ij})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m} =_{\text{def}} A^t$. Quindi la trasposta di una matrice con una riga ed n colonne $(a, b \dots)$ sarà $\begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \end{pmatrix}$, con n colonne ed una riga.

NOTAZIONE: un elemento di \mathbf{R}^d considerato come *vettore* (di *spostamento* ovvero *velocità* etc.) su cui si agisce conviene scriverlo come matrice con d righe ed una colonna. Se si considera come matrice relativa ad un'applicazione lineare da \mathbf{R}^d ad \mathbf{R} (come vettore che agisce come *forza* ovvero *impulso* etc.) come matrice con una riga e d colonne. Nel primo caso le coordinate generiche vengono scritte con indici in alto, nel secondo con indici in basso.

- Questa convenzione si estende quando: si rappresenta una *funzione lineare* da \mathbf{R}^n a \mathbf{R}^m come azione di una matrice con il prodotto (scalare) *riga* i^a della matrice per *colonna* del vettore dato per avere la i^a componente del vettore risultato; quando si rappresenta la *composizione* di due funzioni lineari come prodotto *righe per colonne* delle matrici ad esse rispettivamente associate.

Esercizio: la relazione tra trasposto e prodotto righe per colonne è $(AB)^t = B^t A^t$.

- Si dimostra che il rango di una matrice con m righe ed n colonne $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ è la *dimensione dell'immagine* dell'applicazione lineare da \mathbf{R}^n in \mathbf{R}^m associata:

$$(x^1, \dots, x^n)^t = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto (a_1^1 x^1 + \dots + a_n^1 x^n, \dots, a_1^m x^1 + \dots + a_n^m x^n)^t = \left(\sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij}^j x^j \right)_{1 \leq i \leq m}^t$$

Definizione: - Il luogo di zeri di una funzione polinomiale di secondo grado in n variabili:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^i x^j x_i + 2 \sum_{1 \leq i \leq n} b_i x^i + c, \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}^i|^2 \neq 0, \quad \text{cioè } \mathbf{x}^t A \mathbf{x} + 2 \mathbf{b}^t \mathbf{x} + c, \quad A \neq \mathbf{0}_{n \times n}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^t \tilde{A} \tilde{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} c & \mathbf{b}^t \\ \mathbf{b} & A \end{pmatrix}, \quad A \neq \mathbf{0}_{n \times n}$$

si dice *quadrica*. Se $n = 2$ *conica*. Una quadrica si dice *non degenera* se $\det \tilde{A} \neq 0$.

Osservazione: Poiché: $\sum a_{ij} x_i x_j = \sum \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} x_i x_j$, si assume che A , e quindi \tilde{A} , sia una *matrice simmetrica*; i.e. $a_{ij} = a_{ji}$.

Osservazione: si è identificato $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ con il sottospazio affine degli $\begin{pmatrix} x^0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1}$ con la prima coordinata eguale ad 1: $x^0 = 1$. Conviene quindi osservare che il gruppo affine su \mathbf{R}^n può essere identificato con un sottogruppo, del gruppo lineare su \mathbf{R}^{n+1} , che agisce su tale sottospazio affine di \mathbf{R}^{n+1} nel seguente modo: alla trasformazione affine $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{w} + N\mathbf{x}$ da \mathbf{R}^n in se si associa l'azione della matrice:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{w} & N \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{w} + N\mathbf{x} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{z} & P \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{w} & N \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{z} + P\mathbf{w} & PN \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{w} & N \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ -N^{-1}\mathbf{w} & N^{-1} \end{array} \right) = Id_{n+1}$$

Nelle variabili $\mathbf{y} = -\mathbf{v} + M^{-1}\mathbf{x}$, considerando che $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ M\mathbf{v} \\ M \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{y}}$, si ottiene :

$$\tilde{\mathbf{y}}^t \left[\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{v}^t M^t \\ \mathbf{0} & M^t \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} c & \mathbf{b}^t \\ \mathbf{b} & A \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^t \\ M\mathbf{v} & M \end{array} \right) \right] \tilde{\mathbf{y}}$$

CLASSIFICAZIONE AFFINE DELLE CONICHE

Ogni conica può essere trasformata in una delle seguenti con un cambiamento di coordinate affine del tipo $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{w} + N\mathbf{x}$.

$x^2 + y^2 - 1 = 0$	Ellisse reale	\bigcirc	$\det A > 0:$ $\text{rk} \tilde{A} = 3, \det \tilde{A} < 0;$	} A C E N T R O
$x^2 + y^2 + 1 = 0$	Ellisse immaginaria (vuoto)	\emptyset	$\text{rk} \tilde{A} = 3, \det \tilde{A} > 0;$	
$x^2 + y^2 = 0$	Ellisse degenere (un punto)	\cdot	$\text{rk} \tilde{A} = 2.$	
$x^2 - y^2 - 1 = 0$	Iperbole	$) ($	$\det A < 0:$ $\text{rk} \tilde{A} = 3;$	
$x^2 - y^2 = 0$	Iperbole degenere (rette incidenti)	χ	$\text{rk} \tilde{A} = 2,$	
$y^2 - x = 0$	Parabola	\cup	$\det A = 0:$ $\text{rk} \tilde{A} = 3, \text{rk} A = 1$	
$y^2 - 1 = 0$	Parabola degenere (rette parallele)	\equiv	$\text{rk} \tilde{A} = 2, \text{rk} A = 1$	
$y^2 + 1 = 0$	Parabola degenere (vuoto: rette immaginarie separate)	\emptyset	$\text{rk} \tilde{A} = 2, \text{rk} A = 1$	
$y^2 = 0$	C. doppiamente degenere (retta "doppia")	—	$\text{rk} \tilde{A} = 1$	

Una famiglia di invarianti classificante é quindi data da $\text{sign}(\det A)$, $\text{rk} \tilde{A}$, $\text{rk} A$, $\text{sign}(\det \tilde{A})$.

CLASSIFICAZIONE AFFINE DELLE QUADRICHE NON DEGENERI

Ogni quadrica non degenera può essere trasformata in una delle seguenti con un cambiamento di coordinate affine.

		$\text{rk}\tilde{A} = n + 1$
$\sum_{i=1}^p (x^i)^2 - \sum_{i=p+1}^n (x^i)^2 - 1 = 0$	Tipo ellisse-iperbole	$\det A \neq 0$
$\sum_{i=1}^p (x^i)^2 - \sum_{i=p+1}^{n-1} (x^i)^2 - x^n = 0$	Tipo parabola	$\text{rk}A = n - 1$

QUADRICHE NELLO SPAZIO

$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$	Ellissoide	$\det A > 0$ $\text{rk}\tilde{A} = 4, \det\tilde{A} < 0$
$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$	Ellissoide immaginario (vuoto)	$\text{rk}\tilde{A} = 4, \det\tilde{A} > 0$
$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	Ellissoide degenera (un punto)	$\text{rk}\tilde{A} = 3, \det\tilde{A} = 0$
$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$	Iperboloide iperbolico ad una falda	$\det A < 0$ $\text{rk}\tilde{A} = 4, \det\tilde{A} > 0$
$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$	Iperboloide ellittico a due falde	$\text{rk}\tilde{A} = 4, \det\tilde{A} < 0$
$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	Iperboloide degenera (doppio cono)	$\text{rk}\tilde{A} = 3, \det\tilde{A} = 0$
$x^2 + y^2 - z = 0$	Paraboloide ellittico	$\det A = 0, \text{rk}\tilde{A} = 4$ $\text{rk}A = 2$ $\det\tilde{A} < 0$
$x^2 - y^2 - z = 0$	Paraboloide iperbolico (sella)	$\text{rk}A = 2$ $\det\tilde{A} > 0$
$x^2 - y = 0$	Paraboloide degenera (cilindro parabolico)	$\det A = 0, \text{rk}\tilde{A} = 3$ $\text{rk}A = 1$
$x^2 \pm y^2 \pm 1 = 0$	Cilindri su coniche non degeneri con centro, eventualmente il vuoto	$\text{rk}A = 2$
$x^2 \pm 1 = 0$ $x^2 \pm y^2 = 0$	Vuoto o piani paralleli Retta o piani incidenti	$\det A = 0, \text{rk}\tilde{A} = 2$ $\text{rk}A = 1$ $\text{rk}A = 2$
$x^2 = 0$	Piano "doppio"	$\det A = 0, \text{rk}\tilde{A} = 1$ $\text{rk}A = 1$