Matematica, Anno Accademico 2005-2006, Scienze Geologiche

M. Novaga, V.M. Tortorelli

Breve compndio sul determinante
dal 4 ottobre al 12 ottobre 2005

Programma, registro degli argomenti svolti e materiale relativo al corso possono essere reperiti in rete all'indirizzo http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html ivi selezionando il nome del corso.

Orientazione. Intuitivamente due coppie *ordinate* di vettori (non nulli e non paralleli) nel piano si dicono con la stessa orientazione se i secondi spazzano l'angolo convesso verso i primi nello "stesso senso". Si scrive $O(v,w)=1$ rispettivamente $O(v,w)=-1$, se la coppia di vettori del piano ha la stessa orientazione della coppia "canonica" $((1,0),(0,1))$.

Area orientata e determinante Data (v,w) si considera il parallelogramma $\mathbf{P}$ di vertici O, v, w, $v+w$ generato. La quantità $d(v,w)=O(v,w)Area(\mathbf{P})$ ha le proprietà:

$$d(v,w)=-d(w,v) \text{ (alternante)},$$

$$d(v+tu,w)=d(v,w)+td(u,w),\ d(v,w+tu)=d(v,w)+td(v,u) \text{ (bilineare)}$$

La seconda proprietà si deduce da tre fatti: $d(tu,w)=td(u,w)$ (variando una dimensione l'area varia dello stesso fattore), $d(v+tw,w)=d(v,w)$ (parallegrammi con stessa base ed altezza hanno stessa area), ogni u si scrive come $sv+\sigma w$ (a parte i casi "degeneri").

- Analoghe considerazioni intuitive si fanno per 3 vettori ordinati in $\mathbf{R}^3$ riferendosi al volume orientato del parallelepipedo da essi individuato. Nel caso alternante vuol dire che se si scambiano due vettori della terna ordinata tra loro si cambia segno.

Proposizione - Esiste un'unica funzione di coppie ordinate di vettori del piano cartesiano che sia bilineare, alternante e che valga 1in $((1,0),(0,1))$: essa associa a $(P,Q)=((a,b),(\alpha,\beta))$ il numero $a\cdot\beta-b\cdot\alpha$.

- Analogamente esiste un'unica funzione di terne ordinate di vettori dello spazio cartesiano che sia trilineare, alternante e che valga 1 in $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$:

$$\begin{aligned}(P,Q,R)=((a,b,c),(\alpha,\beta,\gamma),(A,B,C)))\mapsto{}& a(\beta C-\gamma B)-\alpha(bC-cB)+A(b\gamma-\beta c)=\\ ={}& a(\beta C-\gamma B)-b(\alpha C-A\gamma)+c(\alpha B-A\beta)\end{aligned}$$

DEFINIZIONE: data una coppia ordinata (P,Q) di vettori nel piano cartesiano o una terna ordinata (P,Q,R) di vettori nello spazio cartesiano tali numeri sono detti *determinanti*, ed indicati rispettivamente con $det(P,Q)$ e $det(P,Q,R)$.

DEFINIZIONE: una coppia ordinata di vettori di $\mathbf{R}^2$, o una terna ordinata di vettori in $\mathbf{R}^3$, si dicono avere *orientazione positiva* se il loro determinante è positivo.

DEFINIZIONE: dati $Q=(\alpha,\beta,\gamma)$, $R=(A,B,C)$ non nulli ne paralleli il vettore $Q\wedge R=_{def}$ $(\beta C-\gamma B,-(\alpha C-A\gamma),\alpha B-A\beta)$ si dice prodotto vettore. Si ha $det(X,R,Q)=X\bullet Q\wedge R$.

- $Q\wedge R$ è ortogonale a Q ed R; $(Q\wedge R,Q,R)$ ha orientazione positiva, come $(Q,R,Q\wedge R)$.

Come per il prodotto scalare si ha:

- nel piano $det(P,Q)=|P||Q|\sin\theta$, ($\theta$ è la misura dell'angolo POQ orientato)
- nello spazio $|P\wedge Q|=|P||Q||\sin\theta|$

È l' area del parallelograma di vertici $O,\ P,\ Q,\ P+Q$.

Con un minimo di fatica si prova che il modulo del determinante coincide con le altre nozioni di area o di volume.