Matematica, Anno Accademico 2005-2006, Scienze Geologiche

M. Novaga, V.M. Tortorelli

II foglio di esercizi

dal 14 ottobre al 28 ottobre 2005

Programma, registro degli argomenti svolti e materiale relativo al corso possono essere reperiti in rete all'indirizzo http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html ivi selezionando il nome del corso.

PRINCIPIO DI INDUZIONE Partendo dagli assiomi di $\mathbf{R}$ ed da quello dell'esistenza di intersezioni infinite si identifica l'insieme dei numeri naturali come segue:

$\mathbf{N} = \bigcap\{A \subseteq \mathbf{R} :\ 1 \in A,\ x \in A \Rightarrow x+1 \in A\}$.

a - Si ha che se $A \subseteq \mathbf{N}$, $m \in A$, $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$ allora A è l'insieme dei naturali più grandi di m.

b- Ciò è equivalente a dire che se un proprietà vale per 1 e "passa al successore" allora vale per tutti i numeri naturali.

c- Ciò è anche equivalente a dire che ogni sottoinsieme di $\mathbf{N}$ ha minimo.

ESERCIZIO n. 1 - Per quali naturali si ha rispettivamente $2^n - 2 \geq n^2,\ n;\quad 3^n \geq n2^n$?

- Provare $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2;\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.
- Provare $1 + 2x + 3x^2 + \ldots nx^{n-1} = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$,
- Sia $a_1 \geq 3$ e $a_{n+1} = a_n^2 - a_n$. Provare che per ogni n si ha $a_n \geq 2$ e quindi che $a_{n+1} \geq a_n$.

ESERCIZIO n.2 - Si consideri la seguente proprietà D_n:

comunque siano dati n numeri non negativi si ha $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1+\ldots x_n}{n}$.

- Si provi che se vale D_n vale D_{2n}.
- Si provi che se vale D_{n+1} vale D_n. Si deduca che per ogni n vale D_n.

ESERCIZIO n. 3 - Si usi la proprietà provata nel precedente esercizio per mostrare che $\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ (se $n > 1-x$),

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2},\quad \sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n+1]{n+1}$ (se $n \geq 4$).

NOTAZIONE:

$A + B = \{x \in \mathbf{R} :\ \exists a \in A,\ b \in B\ x = a + b\}$, $\lambda A = \{x \in \mathbf{R} :\ \exists a \in A\ x = \lambda a\}$.

ESERCIZIO n. 4 Provare che:

a - se $A \subseteq B$ allora $\sup A \leq \sup B$ e $\inf B \leq \inf A$;

b - $\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}$, $\inf A \cup B = \min\{\inf A, \inf B\}$, $\sup \bigcup_{i \in I} A_i = \sup_{i \in I} \sup A_i$;

c - $\sup A + B = \sup A + \sup B$, $\sup -A = -\inf A$, $\sup \gamma^2 A = \gamma^2 \sup A$;

d - se $f : I \to \mathbf{R}$, $g : I \to \mathbf{R}$ allora: $\sup_{x,y \in I} f(x) + g(y) = \sup_{x \in I} f(x) + \sup_{x \in I} g(x) \geq \sup_{x \in I} f(x) + g(x)$.

Si provi che la diseguaglianza è necessaria, e si trovi e provi un analogo enunciato per l'estremo inferiore;

ESERCIZIO n. 5 Si disegnino in modo o approssimativo i grafici delle funzioni: $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$ $x \mapsto x^5$, $x \mapsto x^4$, $x \mapsto |x|^7$; $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \mapsto \sqrt[4]{|x|}$; $x \mapsto \sqrt[15]{x+5}-3$, $x \mapsto -\sqrt{2-x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{3x-3}$.

ESERCIZIO n. 6 - Traslando il grafico di $x \mapsto x^2$ con uno spostamento di $(4,0)$ di quale funzione si ottiene il grafico?

- Traslando il grafico di $x \mapsto x^3$ con uno spostamento di $(-1,0)$?
- Traslando il grafico di $x \mapsto |x|$ con uno spostamento di $(-1,2)$?
- Il simmetrico rispetto all'asse verticale del grafico di $x \mapsto (x-1)^2 + (x-\sqrt{3})^3$ di che funzione è grafico?
- Il simmetrico rispetto all'asse verticale del grafico di $x \mapsto x^3 - 6x - x^2$?
- Il simmetrico del grafico di $x \mapsto (x-2)^3 + 1$ rispetto alla bisettrice degli assi?
- Che dire della stessa simmetria per il grafico di $x \mapsto x^2$?

ESERCIZIO n. 7 In generale se $g(f(x)) = x$ il grafico di g sull'immagine di f si ottiene dal grafico di f per simmetria rispetto alla bisettrice.

DEFINIZIONE: Una funzione a *valori reali* definita su un convesso f si dice *convessa* se e solo se il suo sopragrafico $\{(\mathbf{x}, y) : y \geq f(\mathbf{x})\}$ è convesso.

ESERCIZIO n. 8 Una funzione è convessa se e solo se $f((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}) \leq (1-t)f(\mathbf{a}) + tf(\mathbf{b})$ per ogni numero $t \in [0;1]$.

ESERCIZIO n. 9 Disegnare i grafici delle funzioni: $x \mapsto -\sin x$, $x \mapsto \sin 3x$, $x \mapsto \cos\frac{x}{2}$, $x \mapsto 3\sin x$, $x \mapsto \tan(x - \frac{\pi}{2})$, $x \mapsto |\sin x|$, $x \mapsto \sin^2 x$, $x \mapsto e^{-x}$, $x \mapsto \log(1+2x+x^2)$, $x \mapsto 3e^{x-1} - 2$, $|\log|x-1||$.

ESERCIZIO n. 10 Dire se le seguenti funzioni sono periodiche ed indicarne il periodo: $x \mapsto \sin(\pi^2 - \pi x)$, $x \mapsto e^{|\sin x| + |\cos x|}$, $x \mapsto \sin(x^2)$, $x \mapsto \log(3\sin^2 x + \sin\frac{x}{2})$, $x \mapsto \sin^5 x + 3\cos^7 2x + 1$.

ESERCIZIO n. 11 Scrivere in fissate coordinate cartesiane (e come funzione delle coordinate (x,y) del punto da trasformare) le seguenti trasformazioni affini del piano o dello spazio:
- simmetria rispetto al punto $(1,2)$
- simmetria rispetto alla generica retta passante per l'origine
- simmetria rispetto alla retta passante per $(2,3)$ e parallela a $(3,4)$
- rotazione antioraria di un sesto di 'angolo giro' attorno all'origine
- rotazione antioraria di un ottavo di 'angolo giro' attorno al punto $(4,5)$
- simmetria rispetto al punto $(1,2,3)$
- simmetria rispetto al piano $x - y + z = 0$
- simmetria rispetto al piano $x - y + z = 3$
- rotazione antioraria di un angolo retto attorno all'asse verticale $(0,0,1)$
- rotazione di un angolo retto attorno all'asse orientato positivamente dall'origine a $(1,1,1)$ in senso antiorario.

ESERCIZIO n. 12 Scrivere in fissate coordinate cartesiane (e come funzione delle coordinate (x,y) del punto da trasformare) le seguenti trasformazioni affini dal piano o dello spazio: la dilatazione di centro $(1,1)$ e fattore di scala $\frac{1}{2}$; la dilatazione anisotropa di centro $(1,1)$ e fattore di scala $\frac{1}{2}$ nella direzione $(1,2)$ e fattore 2 nella direzione $(2,1)$. dilatazione anisotropa di centro l'origine e fattori di scala $2,\ 4,\ -1$ nelle direzioni $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,2,3)$

ESERCIZIO n. 13 A che trasformazioni del piano o dello spazio corrsipondono le seguenti funzioni: $(x,y) \mapsto (-y,x)$,$(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1)$, $(x-y, x+y)$; $(x,y,z) \mapsto (x,-y,-z)$, $(x,y,0)$, $(\frac{1}{2}x, 2y, 0)$

ESERCIZIO n. 14 - Date due rette nel piano che trasformazione si ottiene facendo prima la simmetria rispetto ad una di esse e quindi la simmetria rispetto la seconda?
- Scambiando l'ordine di queste simmetrie quando si ottiene lo stesso risultato?

ESERCIZIO n. 15 Una trasformazione che manda ogni retta in un'altra retta parallela alla prima e non lascia nessun punto fisso del piano è una traslazione.
- Una trasformazione che manda ogni retta in un'altra retta parallela alla prima e lascia un punto del piano fisso è una dilatazione rispetto ad un punto.
-Dati due segmenti paralleli quante sono le traslazioni e le dilatazioni che trasformano uno nell'altro?
-Dati quattro punti $A \neq B$, $C \neq D$ vi è un'unica traslazione o dilatazione che trasforma A in C e B in D.

ESERCIZIO n. 16 Quali sono tutte e sole le trasformazioni lineari bigettive che trasformano $x^2 + y^2 = 1$ in se?
-Quali sono tutte e sole le trasformazioni lineari bigettive che trasformano $|x| + |y| = 1$ in se?

ESERCIZIO n. 17 Siano $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $a^2 + b^2 = 1$. La funzione $R : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definita da $R(x,y) = (\xi, \eta), \qquad \xi = ax + by, \quad \eta = -bx + ay$, definisce una *rotazione* del piano (attorno all'origine). Si provi che:

(i) si ha $\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$ per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$;

(ii) posto $U = R(1,0)$, $V = R(0,1)$, le rette per O, U e per O, V formano un sistema di coordinate ortogonali monometriche orientato positivamente;

(iii) posto $(\xi', \eta') = R(x', y')$, si ha $(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$ per ogni $(x,y), (x',y') \in \mathbf{R}^2$.

ESERCIZIO n. 18 Siano $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $a^2 + b^2 = 1$. La funzione $S : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definita da $S(x,y) = (\xi, \eta), \qquad \xi = ax + by, \quad \eta = bx - ay,$
definisce una *simmetria* del piano (rispetto all'origine). Si provi che:

(i) si ha $\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$ per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$;

(ii) posto $U = S(1,0)$, $V = S(0,1)$, le rette per O, U e per O, V formano un sistema di coordinate ortogonali monometriche orientato negativamente;

(iii) posto $(\xi', \eta') = S(x', y')$, si ha $(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$ per ogni $(x,y), (x',y') \in \mathbf{R}^2$.

ESERCIZIO n.19 Si provi che tutte e sole le trasformazioni lineari del piano che conservano il prodotto scalare sono le isometrie lineari (rotazioni e riflessioni).

ESERCIZIO n. 20** Le trasformazioni T bigettive del piano che mandano rette in rette sono tutte e sole le trasformazioni affini ($T(x, y) - T(0, 0)$ è lineare) e bigettive.

ESERCIZIO n. 21** Le trasformazioni del piano che conservano le distanze sono affini e la loro parte lineare è data da matrici con colonne ortogonali di norma 1, che rappresentano rotazioni e riflessioni.

ESERCIZIO n.22 Le trasformazioni lineari del piano che conservano gli angoli tra due semirette sono tutte e sole quelle del tipo $(x, y) \mapsto (ax + by, -bx + ay)$, $(ax + by, bx - ay)$.

ESERCIZIO n. 23 Si considerino i luoghi dei punti di $\mathbf{R}^2$ descritti dalle seguenti equazioni:

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & x^2 + y^2 - 1 = 0, & \text{(v)} & x^2 + y^2 + xy = 0, \\ \text{(ii)} & x^2 + y^2 = 0, & \text{(vi)} & x^2 - y^2 = 0, \\ \text{(iii)} & x^2 + y^2 + 1 = 0, & \text{(vii)} & x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0, \\ \text{(iv)} & x^2 + y^2 + 2xy = 0, & \text{(viii)} & (x^2 - 1)^2 + y^2 = 0, \end{array}$$

e si riconosca quale delle precedenti equazioni rappresenta:

(a) nessun punto, (d) una retta,
(b) un punto, (e) due rette,
(c) due punti, (f) una circonferenza.

ESERCIZIO n. 24 Riconoscere che tipo di coniche definiscono rispettivamente i seguenti luoghi di zeri:
$x^2 + y^2 + 2xy = 0$, $xy = 1$, $(x - y)^2 = (x + y)^2$, $x^2 + y^2 - 6xy - x + 4 = 0$, $xy - 23y + 8y - 1 = 0$, $3x^2 + 2y^2 - 3xy + x + y - 100 = 0$.

ESERCIZIO n. 25 Verificare che:
- un ellisse è il luogo dei punti con somma delle distanze da due punti fissi costante;
- un iperbole è il luogo dei punti con differenza delle distanze da due punti fissi costante;
- una parabola è il luogo dei punti equidistanti da una retta fissa e da un punto fisso.

OSSERVAZIONE si può verificare dando la nozione di tangenza che se una retta interseca una conica non degenere in un sol punto è ad essa tangente in quel punto.
DEFINIZIONE - Si dice cammino di riflessione rispetto ad una retta per un suo punto l'unione di due semirette (lati) con origine nel punto e simmetriche rispetto all'asse perpendicolare alla retta nel punto.
- Un cammino di riflessione rispetto ad un insieme in un suo punto è un cammino di riflessione rispetto all'eventuale retta tangente all'insieme dato in questo suo punto.

ESERCIZIO n. 26 Verificare che:
- i cammini di riflessione rispetto ad una parabola con un lato parallelo all'asse della stessa hanno l'altro che passa per il fuoco della parabola;
- i cammini di riflessione rispetto ad un'elisse che hanno un lato che passa per un fuoco hanno il secondo lato che passa per l'altro fuoco;
- i cammini di riflessione rispetto ad un iperbole che hanno un lato passante per un fuoco hanno prolungamento del secondo lato passante per l'altro fuoco.
