

ESERCIZIO n. 1 Un punto si muove su una retta in modo che la distanza dal punto iniziale è proporzionale al quadrato del tempo percorso. In due minuti percorre dodici metri. Si trovi la velocità media: a- nei primi cinque minuti, b- tra il quarto minuto e il settimo. Si calcoli la velocità istantanea al settimo minuto.

ESERCIZIO n. 2 a- Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$$\sin(100 \cdot x), e^{x^{100}}, \log \frac{x^2+1}{x^2+x+1}, \tan x^2 + \tan^2 x, \frac{x^2+x-1}{x^3+1}, \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}, \sin^2 \cos 3x^3,$$

$$\frac{\arcsin x}{\arccos x}, x^x, (x \log x)^{\sin \sqrt{x}}, \log_x(2^x - x^2)$$

b- Calcolare $f'(x^2)$ se $f(x) = x^3$, e se $g(x) = f(x^2)$ calcolare $g'(x)$.

c- Calcolare nel punto di coordinate $(1, y)$ la derivata rispetto alla variabile y della $f(x, y) = x^{x^{x^y}} + \log x(\operatorname{artan}(\operatorname{artan}(\operatorname{artan}(\sin(\cos(xy) + \log(x+y))))))$.

d- Calcolare le derivate prime delle seguenti funzioni nei punti $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 3)$ rispetto ad ognuna delle variabili:

$$e^{x^4 y^2 z} - xz \sin(xy) - 1; \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}; \frac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+z^2}; (x^2+z^2) \log(x^2+y^2); \frac{x \sin zy}{200+zy \sin x}; \frac{x^2 y^2}{x^2+y^4+1};$$

calcolare quindi le funzioni derivate rispetto alla prima variabile delle stesse funzioni.

NOTA - per una funzione $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ da \mathbf{R} in \mathbf{R}^3 (o \mathbf{R}^2) le cui componenti sono derivabili, il vettore "velocità" dato dalle derivate all'istante t_0 se non nullo dà la direzione tangente alla curva descritta dal cammino γ nel punto $\gamma(t_0)$.

ESERCIZIO n. 3 a- Si trovi la tangente nel punto $(1, 1)$ dell'insieme di punti del piano definito da $x^7 + y^7 - 2 = 0$

b- Si trovino le tangenti nel punto $(0, 0)$ dell'insieme del piano definito da $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.

c- Si trovi l'angolo di incidenza in $(1, 1)$ tra le due curve $y = x$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$.

ESERCIZIO n. 4 a- Si provino le relazioni $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $|\operatorname{artan} x + \operatorname{artan} \frac{1}{x}| = \frac{\pi}{2}$.

b- Si provi che per $x \geq 0$ si ha $\operatorname{artan} x \geq \frac{x}{1+x}$, $2x \operatorname{artan} x \geq \log(1+x^2)$.

ESERCIZIO n. 5 Si studino i grafici delle seguenti funzioni

$$|x^3-1|+3, ||x|-3|+1, x|x^2-1|, (x-2|x|)^2, x+\cos x, \log(x+\sqrt{1+x^2}), \frac{1+3e^x}{\sqrt{4+5e^{2x}}}, (*) \operatorname{arsin} \frac{2x}{1+x^2}.$$

ESERCIZIO n. 6 a- Si studi la derivabilità della funzione definita da $x \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, e nulla per $x = 0$.

b- Si studi la derivabilità della funzione definita da $x^2 \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, e nulla per $x = 0$.

c- Si studi la derivabilità della funzione definita da $x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}$ se $x \neq 0$, e nulla per $x = 0$.

* d- Sia $f(x) = \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Si provi che esiste $f'(0)$ ed è *strettamente positiva*, ma la funzione non è crescente in nessun intervallo contenente 0.

ESERCIZIO n. 7 a- Tra i triangoli rettangoli di ipotenusa di lunghezza assegnata quali hanno area massima?

b- Tra i prismi regolari a base triangolare di volume assegnato V quali rendono minima l'area superficiale?

ESERCIZIO n. 8 Si calcolino se esistono i seguenti limiti:

$$\frac{\arcsin x - x}{x - \operatorname{artan} x} x \rightarrow 0, \quad \frac{\sqrt{2} - \sin x - \cos x}{\log \sin 2x} x \rightarrow \frac{\pi}{4}, \quad (\tan x)(\log \sin x) x \rightarrow 0, \quad \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} x \rightarrow 0,$$
$$\frac{\log(1+x) - \tan x}{x \log(1+x)} x \rightarrow 0, \quad \frac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{1+x+x^2}} x \rightarrow +\infty, \quad \frac{e^{\sqrt{\log x}}}{\sqrt{x}} x \rightarrow +\infty,$$
$$\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{artan} x\right) \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right) x \rightarrow +\infty$$

ESERCIZIO n. 9 Sia $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. a - Si provi che f è continua su \mathbf{R} .

b - Si provi che le derivate di f in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ sono del tipo funzione razionale moltiplicato f .

c - Si provi che f è derivabile infinite volte in $x = 0$.

ESERCIZIO n. 10 a- Si provi che la derivata del prodotto di n funzioni è la somma dei prodotti delle derivate di ognuna delle funzioni per le rimanenti funzioni:

$$D(f_1 \cdot \dots \cdot f_n) = Df_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n + f_1 \cdot Df_2 \cdot \dots \cdot f_n + \dots$$

a - Si provi $D^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f D^{n-k} g$.

b- Si supponga che la funzione g abbia n derivate nel punto a e che la funzione f abbia n derivate in $g(a)$. Si provi che la funzione composta $x \mapsto f(g(x))$ ha n derivate nel punto a .

ESERCIZIO n. 11 a- Sapendo che f è una funzione con la derivata prima e seconda continue e sapendo che $\left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e^3$ quando $x \rightarrow 0$ si calcolino $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

* b- Si provi che se $g = f'$ su un intervallo $[a; b]$ allora g assume tutti valori compresi tra il suo estremo superiore e il suo estremo inferiore sull'intervallo $[a; b]$. In particolare la funzione g non potrà avere discontinuità di tipo "salto". (Si consideri un'opportuna funzione che abbia come valori i coefficienti angolari delle corde sul grafico di f ed un estremo nei punti $(a, f(a))$ nella prima metà dell'intervallo $[a, b]$, ed un estremo in $(b, f(b))$ nella seconda parte).

* c- Si determini una relazione di ricorrenza per i termini della successione numerica data dalle derivate successive calcolate in 0 della funzione $x \mapsto \operatorname{arsin} x$.

ESERCIZIO n. 12 a- Si disegni la curva $2y^2 - x(x-1)^2 = 0$.

b- Si disegni a curva $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.

ESERCIZIO n. 13 Sia $f(x) = x^7 + x + 1$. Si provi che la funzione è bigettiva da \mathbf{R} in se. Detta g la sua inversa si calcoli $\lim_{y \rightarrow +\infty} g\left(\frac{8y}{y+4}\right)$.

ESERCIZIO n. 14 a- Sia $f(x) = x + \log x$. Si provi che è bigettiva da $[0; +\infty[$ in se.

b- Detta g l'inversa di f si provi che $\frac{\log g(a)}{g(a)} \rightarrow 0$ quando $a \rightarrow +\infty$.

* c- si determini esplicitamente una funzione h per cui $g(a) - h(a) \rightarrow 0$ quando $a \rightarrow +\infty$.

(Si provi $\log(1 + \frac{\log g(a)}{g(a)}) = \log a + g(a) - a$).

ESERCIZIO n. 15 Si scriva $\sin^2 x$ come differenza di due funzioni convesse.

ESERCIZIO n. 16 Si consideri l'equazione $f(x) = 2x \arctan x = 1$. Si provi che ha una sola soluzione positiva α . Si provi che $\alpha \leq 1$. Si provi che $\frac{2}{\pi} \leq \alpha$. Usando la convessità di f si provi inoltre che $\alpha \leq \frac{4}{2+\pi}$.

ESERCIZIO n. 17 Si mostri che le uniche funzioni f per cui $f'(x) = f(x)$ sono le funzioni $x \mapsto \alpha e^x$.

ESERCIZIO n. 18 -Si mostri per curva nello spazio data dal cammino $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ la retta tangente non è mai parallela al segmento tra i due estremi

- * Si mostri che in ogni curva piana che ammette tangente continua ogni corda ha una direzione tangente parallela.
