Matematica, Anno Accademico 2006-2007, Scienze Geologiche

M. Novaga, V.M. Tortorelli

Breve compendio sul determinante

Programma, registro degli argomenti svolti e materiale relativo al corso possono essere reperiti in rete all'indirizzo http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html ivi selezionando il nome del corso.

Orientazione. Intuitivamente due coppie *ordinate* di vettori (non nulli e non paralleli) nel piano si dicono con la stessa orientazione se i secondi spazzano l'angolo convesso verso i primi nello "stesso senso". Si scrive $O(v,w) = 1$ rispettivamente $O(v,w) = -1$, se la coppia di vettori del piano ha la stessa orientazione della coppia "canonica" $((1,0),(0,1))$.
Area orientata e determinante Data (v,w) si considera il parallelogramma $\mathbf{P}$ di vertici O, v, w, $v+w$ generato. La quantità $d(v,w) = O(v,w)Area(\mathbf{P})$ ha le proprietà:

$$d(v,w) = -d(w,v) \text{ (alternante)},$$
$$d(v+tu,w) = d(v,w) + td(u,w),\ d(v,w+tu) = d(v,w) + td(v,u) \text{ (bilineare)}$$

La seconda proprietà si deduce da tre fatti: $d(tu,w)=td(u,w)$ (variando una dimensione l'area varia dello stesso fattore), $d(v+tw,w)=d(v,w)$ (parallegrammi con stessa base ed altezza hanno stessa area), ogni u si scrive come $sv+\sigma w$ (a parte i casi "degeneri").
- Analoghe considerazioni intuitive si fanno per 3 vettori ordinati in $\mathbf{R}^3$ riferendosi al volume orientato del parallelepipedo da essi individuato. Nel caso alternante vuol dire che se si scambiano due vettori della terna ordinata tra loro si cambia segno.
Proposizione - Esiste un'unica funzione di coppie ordinate di vettori del piano cartesiano che sia bilineare, alternante e che valga 1in $((1,0),(0,1))$: essa associa a $(P,Q) = ((a,b),(\alpha,\beta))$ il numero $a \cdot \beta - b \cdot \alpha$.
- Analogamente esiste un'unica funzione di terne ordinate di vettori dello spazio cartesiano che sia trilineare, alternante e che valga 1 in $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$:

$$(P,Q,R) = ((a,b,c),(\alpha,\beta,\gamma),(A,B,C))) \mapsto a(\beta C - \gamma B) - \alpha(bC - cB) + A(b\gamma - \beta c) =$$
$$= a(\beta C - \gamma B) - b(\alpha C - A\gamma) + c(\alpha B - A\beta)$$

DEFINIZIONE: data una coppia ordinata (P,Q) di vettori nel piano cartesiano o una terna ordinata (P,Q,R) di vettori nello spazio cartesiano tali numeri sono detti *determinanti*, ed indicati rispettivamente con $det(P,Q)$ e $det(P,Q,R)$.
DEFINIZIONE: una coppia ordinata di vettori di $\mathbf{R}^2$, o una terna ordinata di vettori in $\mathbf{R}^3$, si dicono avere *orientazione positiva* se il loro determinante è positivo.
DEFINIZIONE: dati $Q = (\alpha,\beta,\gamma)$, $R = (A,B,C)$ non nulli ne paralleli il vettore $Q \wedge R =_{def} (\beta C - \gamma B, -(\alpha C - A\gamma), \alpha B - A\beta)$ si dice prodotto vettore. Si ha $det(X,Q,R) = X \bullet Q \wedge R$.
- $Q \wedge R$ è ortogonale a Q ed R; $(Q \wedge R, Q, R)$ ha orientazione positiva, come $(Q,R,Q \wedge R)$.
Come per il prodotto scalare si ha:
- nel piano $det(P,Q) = |P||Q| \sin P\hat{O}Q$ ($P\hat{O}Q$ è l'angolo orientato centro l'origine determinato dai due punti)
- nello spazio $|P \wedge Q| = |P||Q||\sin P\hat{O}Q|$
intuitivamente corrisponde all' area del parallelograma di vertici $O,\ P,\ Q,\ P+Q$.
Con un minimo di fatica si prova infatti che il modulo del determinante coincide con le altre nozioni di area o di volume.
- Si osserva che l'area di un parallelogramma nello spazio vista come $|P \wedge Q|$ è la radice quadrata della somma dei quadrati dei parallelogrammi ottenuti proiettando in modo orogonale il parallaelogramma sui piani coordinati, arre che sono i valori assoluti dei determinanti delle matrci due per due ottenute cancellando la stessa componente dalle coordinate di P e Q.