Matematica, Anno Accademico 2006-2007, Scienze Geologiche

M. Novaga, V.M. Tortorelli

II foglio di esercizi

Programma, registro degli argomenti svolti e materiale relativo al corso possono si reperiscono in rete: http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html selezionando il nome del corso.

POLINOMI La forma canonica di un polinomio in una variabile a coefficienti reali $c_0, \dots c_n$ è un'espressione del tipo $c_0 + c_1 x + \dots c_k x^k \dots c_n x^n$.Il suo grado è il massimo esponente della variabile con coefficiente non nullo.
Considerando un valore reale assegnato alla variabile si definiscono la somma e il prodotto di polinomi. I coefficienti della somma sono la somma dei coefficienti di egual grado dei polinomi addendi, il coefficiente di grado k del prodotto è la somma dei prodotti dei coefficienti di grado h di uno dei polinomi con quello di grado $k-h$ dell'altro. Il grado della somma non è maggiore del massimio del grado degli addendi e il grado del prodotto è la somma dei gradi degli addendi.
Due polinomi a coefficienti reali hanno gli stessi coefficienti se e solo se danno gli stessi valori per ogni assegnamento di variabile.
Un polinomio $p(x)$ si annulla per $x = a$ se e solo se $p(x) = (x-a)q(x)$. Un plinomio di grado n si annulla quindi in al più n punti diversi.
Dati due polinomi A e B con grado di A non minore del grado di B esistono e sono unici due polinomi Qed R per cui $A = BQ + R$ e grado di R minore strettamente del grado di B.

ESERCIZIO n. 1 - Si scriva un poilinomio che non ha radici reali.
- Si scriva un polinomio a coefficienti razionali che ha almeno una radice reale e nessuna radice razionale.
- Si provi che un polinomio con coefficienti interi se ha una radice razionale questa è uno dei rapporti tra i divisori del termine noto e quelli del coefficiente di grado massimo.

ESERCIZIO n. 2 Si divida il primo per il secondo polinomio nelle seguenti coppie: $(x+1,\ x^2+1)$, $(x^2+1,\ x+1)$, $(x^{101}+10,\ x+1)$

ESERCIZIO n. 3 Perchè il valore $\sin x$ non può essere calcolato da nessun polinomio?

PRINCIPIO DI INDUZIONE Partendo dagli assiomi di $\mathbf{R}$ ed da quello dell'esistenza di intersezioni infinite si identifica l'insieme dei numeri naturali come segue:

$\mathbf{N} = \bigcap \{A \subseteq \mathbf{R} :\ 1 \in A,\ x \in A \Rightarrow x+1 \in A\}$.

a - Si ha che se $A \subseteq \mathbf{N}$, $m \in A$, $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$ allora A è l'insieme dei naturali più grandi di m.
b- Ciò è equivalente a dire che se un proprietà vale per 1 e “passa al successore” allora vale per tutti i numeri naturali.
c- Ciò è anche equivalente a dire che ogni sottoinsieme di $\mathbf{N}$ ha minimo.

ESERCIZIO n. 4 - Per quali naturali si ha rispettivamente $2^n - 2 \geq n^2,\ n;\quad 3^n \geq n2^n$?
- Provare $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2;\ \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};\ \sum_{k=1}^n k^3 = (\sum_{k=1}^n k)^2$.
- Provare $1 + 2x + 3x^2 + \dots nx^{n-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$,
- Sia $a_1 \geq 3$ e $a_{n+1} = a_n^2 - a_n$. Provare che per ogni n si ha $a_n \geq 2$ e quindi che $a_{n+1} \geq a_n$.

ESERCIZIO n.5 - Si consideri la seguente proprietà D_n:

comunque siano dati n numeri non negativi si ha $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \le \frac{x_1+\dots x_n}{n}$.

- Si provi che se vale D_n vale D_{2n}.
- Si provi che se vale D_{n+1} vale D_n. Si deduca che per ogni n vale D_n.

ESERCIZIO n. 6 - Si usi la proprietà provata nel precedente esercizio per mostrare che $\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \ge \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ (se $n > 1-x$),
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \ge \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$, $\sqrt[n]{n} \ge \sqrt[n+1]{n+1}$ (se $n \ge 4$).

ESERCIZIO n. 7 Si provi che se $a > 1$ e $k \in \mathbf{N}$ allora $a^n > n^k$ per tutti gli n abbastanza grandi.

ESERCIZIO n. 8 - Si calcolino i limiti per $n \to +\infty$ di $\frac{n^k}{2^n}$, $\frac{2^n}{n!}$, $\frac{n!}{n^n}$.
- Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di $\frac{100n^4-2n+1}{-n^5-n3+2n^2+n}$.
- Se p è un polinomio di grado non maggiore di un polinomio q si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di $\frac{p(n)}{q(n)}$.

ESERCIZIO n. 9 Perchè $n!$ non puøessere calcolato da nessun polinomio valutato sui numeri $n \in \mathbf{N}$?

ESERCIZIO n. 10 - In quanti modi si possono colorare con al più due colori n oggetti?
- In quanti modi si può dividere in al più due parti un insieme di n elementi (pari-dispari)?
- Si motivi l'eguaglianza $2^n = \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n}$.

ESERCIZIO n.11 - In quanti modi si possono colorare n oggetti con al più tre colori diversi?
- In quanti modi si può suddividere un insieme con n elementi in al più tre parti?
- In quanti modi si possono colorare n oggetti con al più m colori diversi?

ESERCIZIO n.12 - Assegnati m numeri, $k_1, \dots k_m$, la cui somma sia n, esprimere in termini di fattoriali in quanti modi si possono distribuire n oggetti tra m persone in modo che la prima ne abbia k_1, la seconda k_2 etc..
- Si deduca una formula analoga a quella di Newton per $(a_1 + \dots a_m)^n$.
- In quanti modi si può suddividere un insieme di otto elementi in quattro insiemi che abbiano rispettivamente uno tre elemnti, un altro un elemento, e i rimanenti due elementi?

ESERCIZIO n.13 - Identificando i monomi che differiscono solo per l'ordine delle variabili che vi compaiono (e.g. $x^2y = xyx$), quanti sono i monomi con coefficiente 1 di decimo grado in due variabili ? Più in generale quanti sono i monomi con coefficiente 1 di grado n in m variabili?

ESERCIZIO n. 14 Calcolare $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{7\pi}{8}$.

ESERCIZIO n. 15 Verificare le seguenti relazioni ed interpretarle geometricamente:

$\cos(x+\pi) = \cos(x-\pi) = -\cos x$, $\sin(x+\pi) = \sin(x-\pi) = -\sin x$;
$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$, $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$, $|\sin x| \le |x| \le |\tan x|$ (se $|x| \le \frac{\pi}{2}$)
$|\cos x - \cos y| \le |x-y|$, $|\sin x - \sin y| \le |x-y|$.

ESERCIZIO n. 16 Trovare l'intersezione $A \bigcap B$ dove
$A = \{x \in \mathbf{R} : x^4 + |x-3| = \sin\left(x\frac{\pi}{2}\right)\}$ e $B = \{x \in \mathbf{R} : |x| \leq 2\}$.

ESERCIZIO n. 17 Risolvere le seguenti equazioni: $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$, $\sin x + 3|\sin x| = 2$, $-\cos^6 x + \sin^3 x \cos^3 x + \sin^6 x = 0$.

ESERCIZIO n. 18 Trovare tutti gli x per cui rispettivamente: $\sin x < \frac{1}{2}$, $4\sin x \tan x > \frac{3}{\cos x}$, $\frac{1+\cos^2 x}{1+\sin x} > 2$.

ESERCIZIO n. 19 Calcolare l'estremo superiore ed inferiore dell'insieme:
$\{\sin \frac{n-1}{2n}\pi : \ n \in \mathbf{N} \}$.

ESERCIZIO n. 20 Dire se le seguenti funzioni sono periodiche ed indicarne il periodo: $x \mapsto \sin(\pi^2 - \pi x)$, $x \mapsto |\sin x| + |\cos x|$, $x \mapsto \sin(x^2)$, $x \mapsto 3\sin^2 x + \sin\frac{x}{2}$, $x \mapsto \sin^5 x + 3\cos^7 2x + 1$.

ESERCIZIO n. 21 - Provare che $\frac{1}{2} + \cos x = \frac{\sin\frac{3}{2}x}{2\sin(x/2)}$,
- Provare e ricordare che: $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$.