Matematica, Anno Accademico 2006-2007, Scienze Geologiche

M. Novaga, V.M. Tortorelli

IV foglio di esercizi

Programma, registro degli argomenti svolti e materiale relativo al corso si reperiscono in rete: http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html selezionando il nome del corso.

ESERCIZIO n. 1 Quali delle seguenti funzioni sono iniettive: $\mathbf{R} \ni x \mapsto x^7 + x^5 - 123$, $\mathbf{R} \ni x \mapsto (x, \cos x, \sin x)$, $[0, 2\pi[\ni x \mapsto (\sin 2x, \cos x)$,
$(x, y, z) \mapsto (3x + 2y + z - 1, x + 2y + 3z + 1, 3x - 2y - 7z + 3)$,

---

DEFINIZIONE: Una funzione a *valori reali* definita su un convesso f si dice *convessa* se e solo se il suo sopragrafico $\{(\mathbf{x}, y) : y \geq f(\mathbf{x})\}$ è convesso.

ESERCIZIO n. 2 - Una funzione è convessa se e solo se $f((1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}) \leq (1-t)f(\mathbf{a})+tf(\mathbf{b})$ per ogni numero $t \in [0;1]$ (il grafico sta sotto le corde)se e solo se $f((1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}) \geq (1-t)f(\mathbf{a})+tf(\mathbf{b})$ per ogni numero $t \notin [0;1]$ (il grafico sta sopra i complementari delle corde).
- Una funzione è convessa se e solo se lo sono le sue restrizioni a rette se solo se lo sono le sue restrizioni a rette parallele agli assi.
- Una funzione di una variabile è convessa se e solo se il rapporto incrementale rispetto ad un qualsiasi punto è una funzione crescente.
- Una funzione f derivabile in ogni punto di un intervallo è convessa se e solo se la sua derivata è crescnte se e solo se $f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y)$ (il grafico sta sopra le rette tangenti)
- Una funzione derivabile due volte su un intervallo è convessa se e solo se la derivata seconda è non negativa
- Una funzione convessa su un intervallo è continua nei punti non estremi dello stesso.

ESERCIZIO n. 3 Si disegnino in modo o approssimativo i grafici delle funzioni: $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$ $x \mapsto x^5$, $x \mapsto x^4$, $x \mapsto |x|^7$; $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \mapsto \sqrt[4]{|x|}$; $x \mapsto \sqrt[15]{x+5} - 3$, $x \mapsto -\sqrt{2-x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{3x-3}$.

ESERCIZIO n. 4 - Traslando il grafico di $x \mapsto x^2$ con uno spostamento di $(4, 0)$ di quale funzione si ottiene il grafico?
- Traslando il grafico di $x \mapsto x^3$ con uno spostamento di $(-1, 0)$?
- Traslando il grafico di $x \mapsto |x|$ con uno spostamento di $(-1, 2)$?
- Il simmetrico rispetto all'asse verticale del grafico di $x \mapsto (x-1)^2 + (x-\sqrt{3})^3$ di che funzione è grafico?
- Il simmetrico rispetto all'asse verticale del grafico di $x \mapsto x^3 - 6x - x^2$?
- Il simmetrico del grafico di $x \mapsto (x-2)^3 + 1$ rispetto alla bisettrice degli assi?
- Che dire della stessa simmetria per il grafico di $x \mapsto x^2$?

ESERCIZIO n. 5 In generale se $g(f(x)) = x$ il grafico di g sull'immagine di f si ottiene dal grafico di f per simmetria rispetto alla bisettrice.

ESERCIZIO n. 6 Disegnare i grafici delle funzioni: $x \mapsto -\sin x$, $x \mapsto \sin 3x$, $x \mapsto \cos \frac{x}{2}$, $x \mapsto 3\sin x$, $x \mapsto \tan(x - \frac{\pi}{2})$, $x \mapsto |\sin x|$, $x \mapsto \sin^2 x$, $x \mapsto e^{-x}$, $x \mapsto \log(1+2x+x^2)$, $x \mapsto 3e^{x-1} - 2$, $|\log|x-1||$.

ESERCIZIO n. 7 Dire se le seguenti funzioni sono periodiche ed indicarne il periodo: $x \mapsto \sin(\pi^2 - \pi x)$, $x \mapsto e^{|\sin x| + |\cos x|}$, $x \mapsto \sin(x^2)$, $x \mapsto \log(3\sin^2 x + \sin\frac{x}{2})$, $x \mapsto \sin^5 x + 3\cos^7 2x + 1$.

ESERCIZIO n. 8 Un punto si muove su una retta in modo che la distanza dal punto iniziale è proporzionale al quadrato del tempo percorso. In due minuti percorre dodici metri. Si trovi la velocità media: a- nei primi cinque minuti, b- tra il quarto minuto e il settimo. Si calcoli la velocità istantanea al settimo minuto.

ESERCIZIO n. 9 a- Calcolare le derivate delle seguenti funzioni
$\sin(100 \cdot x)$, $e^{x^{100}}$, $\log\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$, $\tan x^2 + \tan^2 x$, $\frac{x^2+x-1}{x^3+1}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$, $\sin^2 \cos 3x^3$,
$\frac{\text{arsin x}}{\text{arcos x}}$, x^x, $(x\log x)^{\sin\sqrt{x}}$, $\log_x(2^x - x^2)$
b- Calcolare $f'(x^2)$ se $f(x) = x^3$, e se $g(x) = f(x^2)$ calcolare $g'(x)$.
c- Calcolare nel punto di coordinate $(1, y)$ la derivata rispetto alla variabile y della $f(x, y) = x^{x^{x^y}} + \log x(\text{artan}(\text{artan}(\text{artan}(\sin(\cos(xy) + \log(x + y))))))$.
d-Calcolare le derivate prime delle seguenti funzioni nei punti $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 3)$ rispetto ad ognuna delle variabili:

$$e^{x^4y^2z} - xz\sin(xy) - 1;\ \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2};\ \frac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+z^2};\ (x^2 + z^2)\log(x^2 + y^2);\ \frac{x\sin zy}{200+zy\sin x};\ \frac{x^2y^2}{x^2+y^4+1};$$

calcolare quindi le funzioni derivate rispetto alla prima variabile delle stesse funzioni.

NOTA - per una funzione $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}^3$ (o $\mathbf{R}^2$) le cui componenti sono derivabili, il vettore "velocità " dato dalle derivate all'istante t_0 se non nullo da la direzione tangente alla curva descritta dal cammino γ nel punto $\gamma(t_0)$.

ESERCIZIO n. 10 a- Si trovi la tangente nel punto $(1, 1)$ dell'insieme di punti del piano definito da $x^7 + y^7 - 2 = 0$
b- Si trovino le tangenti nel punto $(0, 0)$ dell'insieme del piano definito da $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.
c- Si trovi l'angolo di incidenza in $(1, 1)$ tra le due curve $y = x$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$.

ESERCIZIO n. 11 a- Si provino le relazioni arsin x + arcos $x = \frac{\pi}{2}$, $|\text{artan}x + \text{artan}\frac{1}{x}| = \frac{\pi}{2}$.
b- Si provi che per $x \geq 0$ si ha artan $x \geq \frac{x}{1+x}$, $2x$artan $x \geq \log(1 + x^2)$.

ESERCIZIO n. 12 Si studino i grafici delle seguenti funzioni
$|x^3 - 1| + 3$, $||x| - 3| + 1$, $x|x^2 - 1|$, $(x - 2|x|)^2$, $x + \cos x$, $\log(x + \sqrt{1 + x^2})$, $\frac{1+3e^x}{\sqrt{4+5e^{2x}}}$, $(*)$ arsin$\frac{2x}{1+x^2}$.

ESERCIZIO n. 13 a- Si studi la derivabilità della funzione definita da $x\sin\frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, e nulla per $x = 0$.
b- Si studi la derivabilità della funzione definita da $x^2 \sin\frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, e nulla per $x = 0$.
c- Si studi la derivabilità della funzione definita da $x^\alpha \sin\frac{1}{x^\beta}$ se $x \neq 0$, e nulla per $x = 0$.
* d- Sia $f(x) = \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Si provi che esiste $f'(0)$ ed è *strettamente positiva*, ma la funzione non è crescente in nessun intervallo contenente 0.

ESERCIZIO n. 14 a- Tra i triangoli rettangoli di ipotenusa di lunghezza assegnata quali hanno area massima?
b- Tra i prismi regolari a base triangolare di volume assegnato V quali rendono minima l'area superficiale?

ESERCIZIO n. 15 Sia $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. a - Si provi che f è continua su $\mathbf{R}$.
b - Si provi che le derivate di f in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ sono del tipo funzione razionale moltiplicato f.
c - Si provi che f è derivabile infinite volte in $x = 0$.

ESERCIZIO n. 16 a- Si provi che la derivata del prodotto di n funzioni è la somma dei prodotti delle derivate di ognuna delle funzioni per le rimanenti funzioni:
$D(f_1 \cdot \ldots f_n) = Df_1 \cdot f_2 \ldots f_n + \; f_1 \cdot Df_2 \cdot \ldots f_n + \ldots$
a - Si provi $D^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k f D^{n-k} g$.
b- Si supponga che la funzione g abbia n derivate nel punto a e che la funzione f abbia n derivate in $g(a)$. Si provi che la funzione composta $x \mapsto f(g(x))$ ha n derivate nel punto a.

ESERCIZIO n. 17 a- Si disegni la curva $2y^2 - x(x-1)^2 = 0$.
b- Si disegni a curva $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.

ESERCIZIO n. 18 Sia $f(x) = x^7 + x + 1$. Si provi che la funzione è bigettiva da $\mathbf{R}$ in se. Detta g la sua inversa si calcoli $\lim_{y \to +\infty} g\left(\frac{8y}{y+4}\right)$.

ESERCIZIO n. 19 a- Sia $f(x) = x + \log x$. Si provi che è bigettiva da $[0; +\infty[$ in se.
b- Detta g l'inversa di f si provi che $\frac{\log g(a)}{g(a)} \to 0$ quando $a \to +\infty$.
* c- si determini esplicitamente una funzione h per cui $g(a) - h(a) \to 0$ quando $a \to +\infty$. (Si provi $\log(1 + \frac{\log g(a)}{g(a)}) = \log a + g(a) - a$).

ESERCIZIO n. 20 Si scriva $\sin^2 x$ come differenza di due funzioni convesse.

ESERCIZIO n. 21 Si consideri l'equazione $f(x) = 2x\text{artan}\, x = 1$. Si provi che ha una sola soluzione positiva α. Si provi che $\alpha \leq 1$. Si provi che $\frac{2}{\pi} \leq \alpha$. Usando la convessità di f si provi inoltre che $\alpha \leq \frac{4}{2+\pi}$.

ESERCIZIO n. 22 Si mostri che le uniche funzioni f per cui $f'(x) = f(x)$ sono le funzioni $x \mapsto \alpha e^x$.

ESERCIZIO n. 23 -Si mostri per curva nello spazio data dal cammino $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ la retta tangente non è mai parallela al segmento tra i due estremi
- * Si mostri che in ogni curva piana che ammette tangente continua ogni corda ha una direzione tangente parallela.
