Matematica per Geologi
A.A. 2007-2008
V.M. Tortorelli

Alcune nozioni sulle equazioni differenziali ordinarie

Equazioni di base

"Quadratura" semplice Se $f : A \to \mathbf{R}$ è continua su A segmento in $\mathbf{R}$, per il teorema fondamentale del calcolo la $t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t f(s)ds$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'(t) = f(t), & t \in A \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Variabili separabili Se $f : A \to \mathbf{R}$, $g : B \to \mathbf{R}$ sono funzioni continue su A e su B, segmenti in $\mathbf{R}$, si tratta di trovare le $y \in C^1(I)$, I segmento incluso in A, per cui $\boxed{y'(t) = f(t)g(y(t)),\ t \in I}$

- Se per $\overline{y} \in B$ si ha $g(\overline{y}) = 0$ allora la funzione costante $y(t) = \overline{y}$, $t \in A$ è soluzione.

Procedimento euristico
i- si cercano le soluzioni che non si annullano: dall'equazione deve essere $\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)$
ii- si considera Γ primitiva di $\frac{1}{g}$ su $J \subset B$
iii- si considera F primitiva di f
iv- si scelgono $I \subset A$ e $c \in \mathbf{R}$ in modo che $c + F(I) \subset \Gamma(J)$
l'eventuale soluzione deve verificare l'equazione $\Gamma(y(t)) = F(t) + c$, $t \in I$

Il procedimento inverso Considerando quindi
i- un generico $]\alpha, \beta[= J \subset B$ in modo che g si annulli solo agli estremi di J,
ii-una generica Γ primitiva di $\frac{1}{g}$ su J (essendo g continua non cambia segno e Γ sarà invertibile su J)
iii-una generica primitiva F di f su A
iv- e determinando di conseguenza I e c t.c. $c + F(I) \subseteq \Gamma(J)$, l'intervallo di estremi $\Gamma(\alpha)$ e $\Gamma(\beta)$, si trova che

$$\boxed{y(t) = \Gamma^{-1}(F(t) + c),\ t \in I}$$

è una soluzione e inoltre $\alpha < y(t) < \beta$, $t \in I$.
<u>*Problema di Cauchy 1:*</u> Quindi se $g(y_0) \neq 0$ per determinare una soluzione locale al problema di Cauchy

$$\boxed{\begin{cases} y'(t) = f(t)g(y(t)), & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}}$$

- si prende J in modo che $y_0 \in J$ e g non si annulli se non agli estremi di J, $\Gamma(p) = \displaystyle\int_{y_0}^p \frac{du}{g(u)}$, $p \in J$

- $F(t) = \displaystyle\int_{t_0}^t f(s)ds$, I per cui $t_0 \in I$ e $F(I) \subset \Gamma(J)$

La funzione $y(t) = \Gamma^{-1}(F(t) + c)$ è ben definita ed è soluzione, e tale y è a *valori in* J: $\alpha < y(t) < \beta$, per $t \in I$. Si ha l'esistenza locale per tale problema e il fatto che la soluzione è *unica finchè non annulla* g.

<u>*Problema di Cauchy 2:*</u> Se $\int_\alpha^{\alpha+\varepsilon} \frac{dp}{|g(p)|} = \int_{\beta-\varepsilon}^\beta \frac{dp}{|g(p)|} = +\infty$ si ottiene che la soluzione trovata è globale e non può annullare g se non agli estremi di A: infatti se fosse $g(y(t_1)) = 0$ si avrebbe $y(t_1)$ eguale ad α o a β da cui $\int_{t_0}^t f(s)ds = \int_{y_0}^{y(t_1)} \frac{du}{g(u)} = \pm\infty$. Ma f ha integrale finito sugli intervalli limitati e chiusi contenuti in A essendo continua.
<u>*Problema di Cauchy 3:*</u> Analogamente se y_0 è uno *zero isolato* di g e $\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0} \frac{dp}{|g(p)|} = \int_{y_0}^{y_0+\varepsilon} \frac{dp}{|g(p)|} = +\infty$ si ha che la funzione costantemente eguale a y_0 è *l'unica soluzione* del problema di Cauchy.

Equazioni lineari del primo ordine $y'(t) - a(t)y(t) = f(t)$ con f e a funzioni continue su un intervallo I.
Omogenea $u'(t) = a(t)u(t)$: se $\alpha' = a$ lo *spazio vettoriale delle soluzioni* è dato da $u(t) = ce^{\alpha(t)}$.
Soluzioni Moltiplicando per $e^{-\alpha(t)}$ ci si riduce alla ricerca di primitive di $e^{-\alpha(t)}y(t)$ e le soluzioni sono date

$$\boxed{y(t) = ce^{\alpha(t)} + \int^t e^{\alpha(t)-\alpha(s)} f(s)ds = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_t^s a(x)dx} f(s)ds}$$

si noti che tutte le soluzioni dell'equazione completa si ottengono da una particolare soluzione (il secondo addendo) sommando una soluzione dell'omogenea.

Sistemi lineari

Teorema 1 Siano $t \to a_{i,j}(t),\ f_i(t),\ 1 \le i,j \le n$ funzioni continue su un intervallo I, $Y_0 \in \mathbf{R}^n$, $t_0 \in I$. Detta $A(t)$ la matrice $n \times n$ con i dati coefficienti e $F(t)$ l'n-pla con le date coordinate f_i: il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t) + F(t), \quad t \in I \\ \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1'(t) = a_{1,1}(t)y_1(t) + \dots a_{1,n}(t)y_n(t) + f_1(t), \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n,1}(t)y_1(t) + \dots a_{n,n}(t)y_n(t) + f_n(t), \\ y_1(t_0) = Y_{0,1} \\ \vdots \\ y_n(t_0) = Y_{0,n} \end{cases} \quad \vdots$$

ha un'unica soluzione globale definita su l'intero I.

Teorema 2 Con le notazioni del precedente teorema

i- Le soluzioni di $U'(t) = A(t)U(t)$ sono uno spazio vettoriale.

ii- Se $t_0 \in I$ e $U^1, \dots U^n$ sono n-soluzioni : $det(U^1(t) \dots U^n(t)) = det(U^1(t_0) \dots U^n(t_0))e^{\int_{t_0}^t \mathbf{tr}A(s)ds}$

- per cui lo spazio delle soluzioni ha dimensione n

- e tutte le sue basi sono del tipo $U^1, \dots U^n$ con U^i soluzione di $\begin{cases} U^{i\prime}(t) = A(t)U^i(t) \\ \\ U^i(t_0) = V^i \end{cases}$ e $V = (V^1 \dots V^n)$ base di $\mathbf{R}^n$

-Il problema di Cauchy per equazioni lineari di ordine n $\begin{cases} \frac{d^n u}{dt^n}(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}(t) + \dots a_1(t)\frac{du}{dt}(t)_{a_0}(t)u(t) = f(t) \\ \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1 \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$

si riduce a un sistema lineare del primo orndine di dimensione n $\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t) + F(t) \\ \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$

considerando come incognita il vettore $Y(t)$ dell'incognita e delle prime $n-1$ derivate $y^1(t) = y(t), y^2(t) = y'(t) \dots y^n(t) = y^{n_1\prime}(t) = y^{(n-1)}(t)$, come termine noto $F(t) = (0, \dots 0, f(t))$, come dato iniziale $Y_0 = (y_0, \dots, y_{n-1})$ e come matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Approccio generale per risolvere il problema di Cauchy

1- si determina una base delle soluzioni dell'omogena $(U^1(t) \dots U^n(t)) = M(t)$: $\quad (detM(t) = detM(t_0)e^{\int_{t_0}^t A(s)ds})$.
2- si trova una soluzione particolare $\overline{U}'(t) = A(t)\overline{U}(t) + F(t)$
3- si cerca $c = (c_1, \dots c_n) \in \mathbf{R}$ per cui la soluzione dell'equazione data da $c_1U^1(t) + \dots c_nU^n(t) + \overline{U}(t)$ verifichi le condizioni iniziali del problema, cioè:

$$(U^1(t_0) \dots U^n(t_0))c = Y_0 - \overline{U}(t_0), \quad c = M(t_0)^{-1}(Y_0 - \overline{U}(t_0))$$

NOTA: si ricorda che $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, $i^2 = -1$.

Il passo 1 nel caso di coefficienti costanti
Teorema 3
i- una base di soluzioni per un'equazione lineare omogena a *coefficienti costanti*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots a_1y' + a_0y = 0,\ a_i \in \mathbf{C}$$

è data dalle funzioni $t^k e^{t\lambda}$, $0 \le k \le m_1$ ed m è la molteplicità di $\lambda \in \mathbf{C}$ come radice del polinomio $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots a_1 z + a_0$.
ii- se $a_{n-1} \dots a_0 \in \mathbf{R}$ allora le radici non reali del polinomio sono coniugate $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ e una base è data dalle n funzioni $t^k e^{\alpha t}\cos\beta t,\ t^k e^{\alpha t}\sin\beta t$ ed m è la comune molteplicità di $\alpha \pm i\beta$ come radice del polinomio. Nel caso $n = 2$ per l'equazione $ay'' + by' + cy = 0$, con coefficienti reali si ha che tutte e sole le soluzioni sono:

$$\begin{cases} c_1e^{t\alpha}\cos\beta t + c_2e^{t\alpha}\sin\beta t & b^2 - 4ac < 0 \\ c_1e^{t\alpha} + c_2te^{t\alpha} & b^2 - 4ac = 0 \\ c_1e^{t\alpha_1} + c_2e^{t\alpha_2} & b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$, con $\alpha \pm i\beta$, ovvero α_1, α_2 soluzioni di $ax^2 + bx + c = 0$.

Il passo 2: principali metodi per la determinazione di una soluzione particolare

Per tentativi

Coefficienti indeterminati per equazioni a coefficienti costanti

Se il termine noto è del tipo $p(t)e^{\lambda t}$ con p polinomio si cerca una soluzione del tipo:

$$t^m \tilde{q}(t)e^{\lambda t}$$

nel caso reale dei coefficienti dell'equazione, con termine noto $e^{\alpha t}(p_1(t)\cos\beta t + p_2(t)\sin\beta t)$, soluzioni del tipo:

$$t^m e^{t\alpha}(q_1(t)\cos\beta t + q_2(t)\sin\beta t)$$

ove $\tilde{q}$ polinomio con lo stesso grado di p, q_1 e q_2 polinomi con gradi minori del massimo di quelli di p_1 e p_2, ed m molteplicità di λ, rispettivamente di $\alpha \pm i\beta$, come radici del polinoomio associato all'equazione.

Variazione delle costanti Se $M(t) = (U^1 \dots U^n)$ è una base per lo spazio delle soiluzioni del sistema omogeneo si cerca una soluzione del tipo

$$W(t) = c_1(t)U^1(t) + \dots c_n(t)U^n(t) = M(t)c(t)$$

ovvero una combinazione delle soluzioni ma con coefficienti *funzioni piuttosto che numeri.* Imponendo che una siffatta funzione sia soluzione del sistema si ottiene

$$W' = AW + F \Leftrightarrow M'c + Mc' = AMc + F \Leftrightarrow Mc' = F \Leftrightarrow c' = M^{-1}F$$

ciò è possibile essendo M sempre invertibile. Quindi da c' integrando si trova c.

- Nel caso di equazioni se $u_1(t), \dots u_n(t)$ sono generatori dello spazio delle soluzioni dell'omogenea, si cercheranno soluzioni del tipo $c_1(t)u_1(t) + \dots c_n(t)u_n(t)$

- Per equazioni del secondo ordine $n = 2$, ci si riduce al sistema numerico

$$\begin{cases} u_1c_1' + u_2c_2' & = & 0 \\ u_1'c_1' + u_2'c_2' & = & \frac{f}{a} \end{cases}$$

Principio di Duhamel Una "giustificazione" del metodo della variazione delle costanti per una soluzione di $W'(t) = A(t)W(t) + F(t)$ è dato dal seguente principio dovuto alla linearità:

> *una soluzione del problema non omogeneo si ottiene per "sovrapposizione di infiniti impulsi istantanei", eguali al termine forzante F, all' "evoluzione omogenea"*

- Formulato nel presente contesto il principio diventa:

$$\boxed{\begin{cases} Y_s'(t) = A(t)Y_s(t), \quad t \in A \\ Y_s(s) = F(s) \end{cases}, \qquad W(t) = \int^t Y_s(t)ds}$$

Derivando formalmente sotto il segno di integrale si ha che W è in effetti soluzione.

- Nel caso delle equazioni del primo ordine $w' = aw + f$, tale formula da esattamente il secondo addendo della soluzione generale: $\int^t e^{-\int_s^t a(x)dx} f(s)ds$.

Se $M(t)$ è la matrice data da una base dello spazio delle soluzioni dell'omeogenea sarà $Y_s(t) = M(t)c(s)$, con $c(s) = M^{-1}(s)F(s)$, e si ottiene

$$W(t) = M(t)\int^t M^{-1}(s)F(s)ds$$

che giustifica completamente i passaggi fatti e mostra come tale soluzione sia quella ottenuta dal metodo della variazione delle costanti.

NOTA: nel caso di coefficienti costanti $W(t)$ viene espressa come $\int_0^t Z_s(t-s)ds$ e $Z_s(0)=F(s)$.

Risolvente di un sistema Se si considera una base di soluzioni del sistema omogeneo $Y'(t) = A(t)Y(t)$ che all'istante s dia la base cartesiana di $\mathbf{R}^n$ indicando con $S_s(t)$ la matrice con colonne tali vettori si ha direttamente dalla definizione e dall'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy:

$$\boxed{\begin{cases} S_s'(t) = A(t)S_s(t), \\ S_s(s) = Id \end{cases}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} S_\sigma(t)S_s(\sigma) = S_s(t) \\ S_s(t)S_t(s) = Id \end{array}}$$

tale matrice di funzioni si chiama *risolvente* del sistema.

- È interessante esprimere le soluzioni generali del sistema non omogeneo $U'(t) = A(t)U(t) + F(t)$ considerando la soluzione particolare data dalla variazione delle costanti arbitrarie $W(t) = S_{t_0}(t)\int S_{t_0}^{-1}(s)F(s)ds$ e le relazioni di invertibilità del risolvente:

$$\boxed{U(t) = S_{t_0}(t)U_0 + \int_{t_0}^t S_s(t)F(s)ds}$$

ottenedo l'analogo della formula per le equazioni del primo ordine.

NOTA: per un'equazione di ordine n con termine noto $f(t)$, se $u_1, \dots u_n$ è una base dello spazio delle soluzioni e si cerca una soluzione particolare del tipo $c_1(t)u_1(t) + \dots c_n(t)u_n(t)$, essendo una base del sistema del primo ordine associato data dai vettori delle prime $n-1$ derivate di tali funzioni, ci si riduce a risolvere il sistema lineare numerico:

$$\begin{pmatrix} u_1(t) & \dots & \dots & \dots & u_n(t) \\ u_1'(t) & \dots & \dots & \dots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & \dots & \dots & \dots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Per equazioni del secondo ordine $n = 2$, si ha: $\begin{cases} u_1 c_1' + u_2 c_2' & = & 0 \\ u_1' c_1' + u_2' c_2' & = & \frac{f}{a} \end{cases}$