1 Sistemi di equazioni differenziali

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y_1'(t) &= ay_1(t) + by_2(t) \\ y_2'(t) &= cy_1(t) + dy_2(t) \end{cases}$$

che possiamo anche scrivere brevemente come $y'(t) = Ay(t)$ dove abbiamo posto

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Se $b \neq 0$, possiamo scrivere

$$y_2(t) = \frac{y_1'(t)}{b} - \frac{ay_1(t)}{b}$$

e derivando

$$y_2'(t) = \frac{y_1''(t)}{b} - \frac{ay_1'(t)}{b}$$

Sostituendo nella seconda equazione del sistema otteniamo

$$\frac{y_1''(t)}{b} - \frac{ay_1'(t)}{b} = cy_1(t) + d\frac{y_1'(t)}{b} - \frac{ay_1(t)}{b}$$

che è equivalente a

$$y_1''(t) - (a+d)y_1'(t) + (ad - bc)y_1(t) = 0$$

Quindi, se $b \neq 0$, $(y_1(t), y_2(t))$ è soluzione del sistema se e solo se

$$y_1''(t) - (\operatorname{tr} A)y_1'(t) + (\det A)y_1(t) = 0$$

e

$$y_2(t) = \frac{y_1'(t)}{b} - \frac{ay_1(t)}{b}$$

Se $b = 0$ ma $c \neq 0$, un ragionamento analogo ci dice che $(y_1(t), y_2(t))$ è soluzione del sistema se e solo se

$$y_2''(t) - (\operatorname{tr} A)y_2'(t) + (\det A)y_2(t) = 0$$

e

$$y_1(t) = \frac{y_2'(t)}{c} - \frac{dy_2(t)}{c}$$

Se $b = c = 0$, le soluzioni del sistema sono ovviamente $y_1(t) = k_1 e^{at}$ e $y_2(t) = k_2 e^{dt}$ con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ arbitrari.
Vediamo ora di studiare qualitativamente le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali come quello appena analizzato.

- Nodi propri
  Supponiamo che la matrice A sia diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ e $\det A > 0$: questo accade se A ha due autovalori reali dello stesso segno, diciamo λ_1 e λ_2, oppure se c'è un unico autovalore $\lambda_1 = \lambda_2$ e $A = \lambda \mathrm{Id}$. Allora le soluzioni sono

  $$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + k_2 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

  dove $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ è un autovettore per λ_1 e $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ è un autovettore per λ_2. Se gli autovalori sono (entrambi) positivi le soluzioni tendono ad avvicinarsi all'origine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quando $t \to -\infty$ e se ne allontanano sempre più se $t \to +\infty$. Esattamente l'opposto accade se gli autovalori sono (entrambi) negativi. Diremo allora che l'origine è un nodo instabile nel primo caso, stabile nel secondo. Le traiettorie sono parabole di fuoco l'origine e di asse individuato dall'autovettore corrispondente all'autovalore di modulo maggiore.

In modo del tutto analogo si descrivono le traiettorie negli altri possibili casi, che riassumiamo brevemente

- Selle
  A è diagonalizzabile e ha due autovalori reali di segno opposto. Le traiettorie sono iperboli i cui asintoti sono individuati dagli autovettori.

- Fuochi
  A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ ma non su $\mathbb{R}$: in particolare A ha due autovalori complessi (coniugati) con parte immaginaria non nulla. Le traiettorie sono spirali di centro l'origine (che vi si dirigono se la parte reale degli autovalori è negativa, ve ne si allontanano se questa è positiva) oppure ellissi di centro l'origine (se la parte reale degli autovalori è nulla).

Se la matrice A non è diagonalizzabile (cioè il suo polinomio caratteristico è del tipo $(T - \lambda)^2$), le traiettorie sono tangenti all'origine alla direzione dell'unico autovettore e tendono, a meno di un fattore logaritmico, ad essere ad essa parallele all'infinito. Si parla in questo caso di nodo improprio.

2 Ancora su massimi e minimi vincolati di funzioni a più variabili

In questa sezione analizziamo con un esempio un metodo che ci permette in certi casi di stabilire se un punto stazionario di una lagrangiana è un punto

di massimo o di minimo.
Siano $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2$ e $g(x, y, z) = x + y + z - 1$. Vogliamo mostrare che f ha minimo sull'insieme $\{g = 0\}$. Consideriamo come al solito la lagrangiana $L = f - \lambda g$ e individuiamo le quaterne (x, y, z, λ) tali che

$$\begin{cases} \nabla L & = & 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

Un semplice calcolo mostra allora che l'unica possibilità è data dalla quaterna $p = (3/7, 3/7, 1/7, 6/7)$. Per vedere che tale punto è di minimo si mostra (è un caso particolare di un criterio generale che la matrice)

$$\begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y & g_z \\ g_x & f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ g_y & f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ g_z & f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

valutata nel punto $(3/7, 3/7, 1/7)$ è definita positiva. Se fosse definita negativa, si tratterebbe invece di un massimo. Nel nostro caso la matrice è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

che è effettivamente definita positiva (tutti gli autovalori sono positivi).

3 Calcolo di aree

Supponiamo di voler calcolare l'area di una superficie S in $\mathbb{R}^3$ dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d,\, z = f(x, y)\}$$

dove $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sono dati così come è data la funzione $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ che supponiamo essere derivabile con continuità. Allora l'area di S è data dalla formula

$$\text{Area di } S = \int_c^d \int_a^b \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy$$

(f_x indica la derivata parziale di f rispetto a x e analogamente f_y). Intuitivamente, si può dire che il termine $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$ rende conto del fatto che l'integrazione (ossia la misura) non avviene nel piano ma su una modificazione di esso che è ottenuta *curvando* il piano tramite, appunto, la funzione f.

Utilizziamo ad esempio questa formula in un esempio concreto. Supponiamo di coler calcolare l'area di una calotta sferica S_r di raggio $0 \leq r \leq 1$: si tratta cioè di

$$S_r = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1\} \cap \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq r^2,\, z \geq 0\}$$

Possiamo riscrivere quindi S_r come

$$S_r = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq r^2,\, z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}\}$$

Allora, applicando la formula,

$$\text{Area di } S_r = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}\, dx\, dy$$

dove $z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$. Siccome $x^2+y^2+z^2 = 1$, l'integrale da calcolare diventa allora

$$\int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho\, d\theta$$

con il cambiamento di variabili $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$. Otteniamo

$$\text{Area di } S_r = 2\pi \left[-\sqrt{1-\rho^2}\right]_0^r = 2\pi(1-\sqrt{1-r^2}) = 2\pi h$$

dove $h = 1 - \sqrt{1-r^2}$ è l'altezza della calotta sferica, ossia la distanza tra il polo nord e il piano (più vicino al polo nord) che taglia la sfera individuando una circonferenza di raggio r. Per esercizio calcolare l'area di una fascia sferica.
Più in generale supponiamo di avere una funzione $g : S \to \mathbb{R}$ e di voler calcolare l'integrale di g lungo la superficie S (è lo stesso principio del calcolo dell'integrale di un campo vettoriale lungo una curva). Semplicemente si tratta allora di calcolare

$$\int_S g dS = \int_c^d \int_a^b g(x,\, y,\, f(x,\, y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy$$

Calcolare per esercizio l'integrale

$$\int_{S_r} g dS_r \quad \text{con } g(x,\, y,\, z) = \frac{1}{1-z^2}$$