Esercizi 12/10/2007

1 Disequazioni

- Segno di un prodotto.
  Vogliamo studiare il segno di un prodotto di due numeri reali. In altri termini vedere quali sono le condizioni affinché due numeri reali A e B soddisfino $AB \geq 0$. Ragioniamo come segue: riconduciamo lo studio di $AB \geq 0$ allo studio dei segni di A e B. Se $A \geq 0$, allora affinché $AB \geq 0$ deve necessariamente essere $B \geq 0$. Viceversa se $A \leq 0$, affinché $AB \geq 0$, deve essere $B \geq 0$. Avendo studiato tutti i casi possibili (prima $A \geq 0$ e poi $A \leq 0$) concludiamo che $AB \geq 0$ se e solo se $A \geq 0$ e $B \geq 0$ oppure $A \leq 0$ e $B \leq 0$. Possiamo scrivere il risultato nella forma seguente

$$\begin{cases} A & \geq & 0 \\ B & \geq & 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} A & \leq & 0 \\ B & \leq & 0 \end{cases}$$

  In modo del tutto analogo $AB \leq 0$ se e solo se

$$\begin{cases} A & \geq & 0 \\ B & \leq & 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} A & \leq & 0 \\ B & \geq & 0 \end{cases}$$

- Studio del segno di una disequazione polinomiale.

  - Vogliamo studiare la disequazione

$$aX + b \geq 0$$

  dove a, $b \in \mathbb{R}$: vogliamo cioè trovare per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $a\alpha + b \geq 0$. Tali valori α saranno gli stessi che verificano $a\alpha \geq -b$. Se $a > 0$, gli α cercati saranno quelli che soddisfano $\alpha \geq -\frac{b}{a}$. Se $a < 0$ la disequazione cambia e per cui gli α cercati saranno quelo che verificano $\alpha \leq -\frac{b}{a}$. Chiaramente si procederà in maniera analoga per la disequazione $aX + b \leq 0$

  - Vogliamo studiare la disequazione

$$X^2 + aX + b \geq 0$$

  dove a, $b \in \mathbb{R}$: vogliamo cioè trovare per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\alpha^2 + a\alpha + b \geq 0$. Forti delle considerazioni fatte fin qui, possiamo provare a scrivere il polinomio di secondo grado $X^2 + aX + b$ come prodotto di due polinomi di primo grado a coefficienti ancora reali. Ciò è possibile solo se $\Delta \geq 0$ dove $\Delta = a^2 - 4b$. Per cui consideriamo separatamente due casi

1^o *caso* $\Delta \geq 0$. In questo caso il polinomio $X^2 + aX + b$ ha due radici (eventualmente coincidenti) α_1 e α_2: possiamo quindi scrivere $X^2 + aX + b = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$. Per quanto visto sul segno di un prodotto la soluzione della disequazione sarà allora

$$\begin{cases} \alpha_1 & \geq & 0 \\ \alpha_2 & \geq & 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \alpha_1 & \leq & 0 \\ \alpha_2 & \leq & 0 \end{cases}$$

2^o *caso* $\Delta < 0$. Dimostreremo in seguito che in questo caso il segno della disequazione è determinato dal valore in un unico elemento di $\mathbb{R}$. In altre parole se, scelto a caso un numero reale β, si ha $\beta^2 + a\beta + b \geq 0$, allora si avrà $\alpha^2 + a\alpha + b \geq 0$ pe ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Se invece, scelto a caso un numero reale β, si ha $\beta^2 + a\beta + b \leq 0$, allora si avrà $\alpha^2 + a\alpha + b \leq 0$ pe ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

• Si procede in maniera del tutto analoga nel caso $X^2+aX+b \leq 0$: se $\Delta \geq 0$ le soluzioni saranno

$$\begin{cases} \alpha_1 & \geq & 0 \\ \alpha_2 & \leq & 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \alpha_1 & \leq & 0 \\ \alpha_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

Se invece $\Delta < 0$, la soluzione sarà determinata dal segno del valore del polinomio su un qualiasi numero reale (nel senso spiegato sopra).

- Risolvere le seguenti disequazioni
  - $3X + 5 \geq 0$.
  - $-3X + 5 \leq 0$.
  - $X^2 + 3X + 1 \geq 0$.
  - $X^2 + 3X - 1 \geq 0$.
  - $X^2 + 7X - 4 \leq 0$.
  - $-X^2 - X - 1 \geq 0$.
  - $-X^2 - X - 1 \leq 0$.
  - $X^2 - 4 \leq 0$.
  - $(X - 4)^2 \leq 0$.

2 Valori assoluti

- Il valore assoulto di un numero reale è una misura della distanza che c'è tra tale numero e 0. Pertanto esso è definito come

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

In altre parole se $x \geq 0$, allora $|x| = x$ mentre se $x < 0$, allora $|x| = -x$.

- Risolvere la disequazione $|x+1| \leq 1$.

    - Se $x+1 \geq 0$ allora la nostra disequazione diventa $x+1 \leq 1$ cioè $x \leq 0$.

    - Se $x+1 \leq 0$ allora la nostra disequazione diventa $-x-1 \leq 1$ cioè $x \geq -2$. Allora $|x+1| \leq 1$ se e solo se $x \leq 0$ oppure $x \geq -2$. Quindi x è soluzione della disequazione se e solo se $x \leq 0$ oppure $x \geq -2$.

- Risolvere le seguenti disequazioni

    - $|X+5| \geq 0$.
    - $|2X-7| \leq -2+|X|$.
    - $|X^2+2X+1| \geq 0$.
    - $|X^2+X| \geq |X|+1$.
    - $||X|+1| \geq 2+|X+2|$.
    - $||X+1|+|X-1|| \geq 1$.

3 Limiti di successioni

- Per ogni numero reale positivo ϵ, esiste un numero naturale n tale che $1/n < \epsilon$.
  Per dimostrare questa affermazione, ricordiamo che i numeri reali godono della proprietà archimedea: dati due numeri reali x e y con $x > 0$, esiste un numero naturale m tale che $nx > y$. L'enunciato che vogliamo dimostrare discende allora facilmente scegliendo $x = \epsilon$ e $y = 1$.

- Dal punto precedente abbiamo

$$0 = \inf \left\{ \frac{1}{n}, \, n \in \mathbb{N} \right\}$$

  come segue facilmente dalla definizione stessa di estremo inferiore di un insieme

- Consideriamo l'insieme A dei numeri reali

$$z = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

  dove x e y sono due numeri reali (strettamente) positivi e minori di 1. Vogliamo determinare gli estremi superiore ed inferiore di A.
  Partiamo col determinare l'estremo superiore. In primo luogo osserviamo che

$$x^2+y^2 = (x-y)^2 + 2xy$$

quindi

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$$

quindi per ogni $z \in A$, si ha $z \leq 1/2$. Quindi l'estremo superiore di A non può essere superiore a $1/2$: infatti la definizione di estremo superiore ci dice che per ogni $\epsilon > 0$ deve esistere $z \in A$ tale che $\sup A - z < \epsilon$. Scegliamo $\epsilon = \sup A - \frac{1}{2} > 0$. Questo porta ad una contraddizione perché avremmo che esisterebbe uno $z \in A$ tale che $\sup A - z < \sup A - \frac{1}{2}$ cioè $z > \frac{1}{2}$. Proviamo allora a vedere se proprio $1/2$ è l'estremo superiore di A. Possiamo provare per esempio a vedere se è il massimo di A, cioè se $1/2 \in A$. Per far questo dobbiamo trovare $0 < x$, $y \leq 1$ tali che

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

Una rapida occhiata ci porta a provare con $x = y = 1$ ed effettivamente troviamo che $1/2 \in A$. Quindi $1/2$ è il massimo di A (e quindi in particolare ne è anche l'estremo superiore).

Passiamo ora all'estremo inferiore. Un'osservazione possibile è che

$$\frac{xy}{x^2+y^2} > 0$$

Possiamo provare a vedere se 0 è l'estremo inferiore di A. Come prima tentiamo la pista del minimo: stavolta però 0 non appartiene ad A quindi sicuramente 0 non è minimo di A. Può tuttavia ancora esserne l'estremo inferiore: proviamo a dimostrarlo. Per farlo, per ogni $\epsilon > 0$ dobbiamo trovare un elemento $z \in A$ tale che

$$z - 0 = z < \epsilon$$

In questi casi una buona idea può essere quella di provare con i numeri razionali. Per esempio, vediamo cosa succede se scegliamo $x = 1/n$ e $y = 1 - 1/n = \frac{n-1}{n}$ per un numero naturale positivo $n \geq 1$. Abbiamo

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\frac{n-1}{n^2}}{\frac{1+(n-1)^2}{n^2}} = \frac{n-1}{1+(n-1)^2} = \frac{1}{\frac{1}{n-1}+n-1}$$

Quest'ultimo passaggio è valido perché $n \neq 1$. Osserviamo ora che

$$\frac{1}{\frac{1}{n-1}+n-1} < \frac{1}{n-1}$$

perché $\frac{1}{n-1} + n - 1 > n - 1$. Quindi facciamo così: fissato un $\epsilon > 0$ possiamo trovare un n tale che $\frac{1}{n-1} < \epsilon$ (come abbiamo visto al primo punto); allora poniamo $x_n = 1/n$ e $y_n = \frac{n-1}{n}$ e definiamo

$$z_n = \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2}$$

Questo z_n appartiene ad A e $z_n < \frac{1}{n-1} < \epsilon$. Questo dimostra che 0 è l'estremo inferiore di A.

4 Diseguaglianze notevoli

- $e^x \geq 1 + x$ per ogni $x \geq 0$.
  Per dimostrare questa diseguaglianza, dobbiamo ricordarci che per definizione, per ogni numero reale x

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Abbiamo allora bisogno del seguente risultato

- $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ per ogni numero naturale positivo n

e per ogni numero reale $x > 0$.
Dimostriamo tale affermazione: dalla formula di Newton[1] otteniamo

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{x^i}{n^i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} \frac{x^i}{n^i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-i+1}{n} \frac{x^i}{i!}$$

perché i termini n, $n-1$, ..., $n-i+1$ sono esattamente i e abbiamo distribuito la potenza n^i nei rispettivi denominatori. Allora

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{i+1}{n}\right) \frac{x^i}{i!} \tag{1}$$

In modo del tutto analogo

$$\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{i+1}{n+1}\right) \frac{x^i}{i!} \tag{2}$$

Confrontiamo il primo termine (cioè quello corrispondente a $i = 0$) della somma in (1) con il primo termine (cioè quello corrispondente a $i = 0$) della somma in (2): abbiamo

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Facciamo lo stesso per ogni termine, cioè confrontiamo i termini i-esimi delle due somme: abbiamo

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{i+1}{n+1}\right) \frac{x^i}{i!} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{i+1}{n}\right) \frac{x^i}{i!}$$

[1] La formula di Newton è $(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i}$.

perché

$$\left(1-\frac{h}{n}\right) \leq \left(1-\frac{h}{n+1}\right)$$

per ogni $h > 0$ e $x^i/i! > 0$. Quindi non solo la somma in (2) ha un termine in più (perché ne ha $n+2$ mentre la somma in (1) ne ha $n+1$ soltanto) ma ciascuno dei primi $n+1$ termini della somma in (2) è maggiore del termine corrispondente nella somma in (1). Deduciamo che la somma in (2) è maggiore della somma in (1), ossia

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

Dimostriamo adesso la diseguaglianza $e^x > 1+x$ per $x \geq 0$: usiamo un semplice teorema che dice che il limite di una successione crescente coincide con l'estremo superiore dell'insieme costituito dai valori della successione. Per cui, e^x, che è il limite della successione $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, soddisfa

$$e^x \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n > 0$$

A questo punto se $x > 0$ possiamo scrivere

$$1+x < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$$

Se $x = 0$ si ha

$$1+x = 1 = e^0 = e^x$$

Quindi

$$e^x \geq 1+x$$

per ogni $x \geq 0$.

- Vale anche $e^x \geq 1+x$ per ogni numero reale x. Per dimostrare questo risultato si usa la cosiddetta diseguaglianza aritmetico geometrica (per gli interessati, vedere gli appunti online sul numero e).