ESERCIZIO 1 9/11/2007 (1)

Tracciare un grafico approssimativo della funzione $f(x)=\sqrt{x^2+x}-x$

- DOMINIO Deve aversi $x^2+x\geq 0$ e ciò basta affinchè f sia definita in x quindi il dominio di f è $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$

- COMP. ai BORDI

a $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\frac{1}{2}$. Infatti possiamo scrivere

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x$ perchè $x>0$

l'esp. di Taylor ci dà $\sqrt{1+\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\left(-\frac{3}{4}+r\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

con $r\left(\frac{1}{x}\right)\to 0$ se $x\to+\infty$. Per cui

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\left(-\frac{3}{4}+r\left(\frac{1}{x}\right)\right)-x=\frac{1}{2}$ ← ASINTOTO ORIZZONTALE $y=1/2$

a $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}-x=+\infty$. Vediamo se c'è un asintoto obliquo

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{-\sqrt{x^2}}-1$ perchè $x<0$

quindi $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2}}+1$

Studiamo $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2}}$. Siccome la radice è una fz. continua, $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x}{x^2}}=$

$=1$. Quindi $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2}}+1=$

$=-\left(\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}\right)-1=-2$. Calcoliamo allora

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}-x+2x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x$. Questo limite vale $-1/2$ come si vede facilmente ragionando come per $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$