Esercizi 07/12/2007

1 Diagonalizzazione di matrici e basi di autovettori

Trovare il polinomio minimo delle seguenti matrici, discuterne la diagonalizzabilità, trovarne autovalori e autovettori (al variare degli eventuali parametri).

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2 Forme quadratiche definite positive ed ellissoidi

Sia A una matrice reale $n \times n$ simmetrica e definita positiva. Questo vuol dire in particolare che A è diagonalizzabile e ha autovalori reali $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$. Inoltre esiste una matrice U che manda una base ortonormale[1] di $\mathbb{R}^n$ in una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$UD^tU = A$$

con D diagonale (avente gli stessi autovalori di A). Le applicazioni lineari $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che mandano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ in una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ si chiamano unitarie o ortogonali. In particolare la matrice U ha per colonne dei vettori che costituiscono una base ortonormale di autovettori per A.
Vogliamo ora cercare di dare un'interpretazione della forma quadratica associata q_A ad A. Se

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

si ha

$$q_A(x_1, \ldots, x_n) = {}^t x A x$$

Osserviamo che, posto

$${}^tUx = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

si ha

$${}^t xAx = {}^t xUD^tUx = {}^t yDy = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

[1] Una base ortonormale è una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tale che $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\langle e_i, e_j\rangle = 1$.

Questa scrittura suggerisce di studiare l'equazione

$$\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 = 1$$

che definisce un'ellisse di semiassi di lunghezza $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ $(1 \leq i \leq n)$. Osserviamo che tali assi hanno direzioni individuate dai vettori y^i dove y^i ha tutte le coordinate uguali a 0 salvo la i-esima he è uguale a 1. Se poniamo $x^i = Qy^i$ otteniamo la scrittura di tali vettori nelle coordinate da cui eravamo partiti e in effetti questi x^i sono gli autovettori di A. Quindi l'ellissi definita da $q_A(x) = 1$ ha gli assi lungo gli autovettori di A e tali assi hanno lunghezza il doppio di $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$.

- Disegnare il luogo di zeri delle forme quadratiche $q_A(x)$ dove A è una delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Cosa si può dire del luogo dei punti in cui una forma quadratica definita negativa è uguale a 1? E di una non definita? Quali figure individuano?

3 Applicazioni conformi

- Definizione e caratterizzazione.
  Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare: diremo che F è conforme se conserva l'ampiezza (non orientata) degli angoli. Intuitivamente se α è l'angolo tra i vettori v e w, allora l'angolo tra i vettori $F(v)$ e $F(w)$ deve essere ancora α. Più precisamente siccome sappiamo che (se v e w sono non nulli)

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

  (dove α è l'ampiezza dell'angolo più piccolo individuato da v e w) allora F è conforme se e solo se

$$\frac{\langle F(v), F(w) \rangle}{\|F(v)\| \|F(w)\|} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

  Questa definizione tiene conto del fatto che non stiamo considerando gli angoli come orientati: il valore assoluto dell'ampiezza dell'angolo più piccolo che v e w individuano è uguale al valore assoluto dell'angolo più piccolo individuato da $Ff(v)$ e $F(w)$.

  Teorema 1. *Un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è conforme se e solo se $F = \lambda U$ con $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ e $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare unitaria. In particolare F è iniettiva (e quindi $n \leq m$).*

Proposizione 1. *Un'applicazione lineare* $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *è unitaria se e solo se* $U^tU = {}^tUU = \mathrm{Id}$.

In particolare se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è conforme e $F = \lambda U$ allora $\det F = \lambda^n$.

- Dimostrare che le matrici reali ortogonali 2×2 sono del tipo

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ossia sono il prodotto di una rotazione per una riflessione.
Più in generale se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una applicazione anche non lineare, diremo che f è conforme nel punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se conserva gli angoli. Possiamo precisare questa nozione: definiamo l'angolo tra due curve in $\mathbb{R}^n$ che si toccano nel punto x_0 come l'angolo tra i due vettori tangenti alle curve nel punto x_0. Diremo che f preserva gli angoli (ossia è conforme) in x_0 se, per qualunque coppia di curve passanti per x_0, f conserva l'angolo tra queste curve in x_0. E' chiaro allora che f è conforme in x_0 se e solo se f è derivabile in x_0 e la matrice jacobiana di x_0 definisce un'applicazione lineare conforme.

- La proiezione stereografica.
Vogliamo descrivere una applicazione π dalla sfera n-dimensionale

$$S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

privata di un punto a $\mathbb{R}^n$ che corrisponda all'idea intuitiva in dimensione 2 che la sfera si può ottenere unendo i lembi all'infinito del piano o alternativamente che tolto un punto alla sfera essa può essere pensata come un piano. Per fare questo (in generale nel caso n-dimensionale) procediamo come segue. Preso un punto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^n$ diverso da $N = (0, 0, \ldots, 1)$ (il polo nord), consideriamo la retta $r(p, x)$ che passa per p e x. Definiamo $\pi(x)$ come il punto di intersezione tra $r(x, N)$ e il piano parallelo al piano $x_{n+1} = 0$ e passante per il polo sud, ossia $S = (0, \ldots, -1)$ (e quindi si tratta del piano $x_n = -1$). La retta $r(x, N)$ può essere descritta in modo parametrico come $N + t(x - N)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Tale retta incontra il piano $x_{n+1} = -1$ appunto quando l'ultima coordinata del vettore $N + t(x - N)$ è uguale a -1. Questo accade per $t = 2/(1 - x_{n+1})$ (che è definito appunto perché $x_{n+1} \neq 1$ perché $x \neq N$). Per questo valore di t il punto corrispondente sulla retta è

$$(\frac{2x_1}{1 - x_{n+1}}, \frac{2x_2}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{2x_n}{1 - x_{n+1}}, -1)$$

Quindi

$$\pi(x) = (\frac{2x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{2x_2}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{2x_n}{1-x_{n+1}})$$

Intuitivamente è chiaro che $\pi : S^n \setminus N \to \mathbb{R}^n$ è biiettiva: proviamolo definendo un'inversa di π. Ragioniamo al contrario: prendiamo un punto $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ che pensiamo dentro $\mathbb{R}^{n+1}$ come $(y, -1)$ (cioè identifichiamo $\mathbb{R}^n$ con il 'piano' n-dimensionale in $\mathbb{R}^{n+1}$ definito da $x_{n+1} = -1$). La retta $r((y, -1), N)$ passante per $(y, -1)$ e N è descritta parametricamente da $N + t((y, -1) - N)$. Questa retta interseca la sfera quando

$$t^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + (1-2t)^2 = 1$$

Poniamo $|y|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$: troviamo che due valori di t soddifano la precedente equazione, precisamente

$$t_1 = 0 \quad \text{e} \quad t_2 = \frac{4}{|y|^2+4}$$

Il primo corrisponde certamente al polo nord come sapevamo già. Ci interessa l'altro, t_2. Il punto la retta corrispondente al valore t_2 è

$$\pi^{-1}(y) = \left(\frac{4y_1}{|y|^2+1}, \frac{4y_2}{|y|^2+1}, \dots, \frac{4y_n}{|y|^2+1}, 1 - \frac{8}{|y|^2+1}\right)$$

Si verifica subito che in effetti $\pi^{-1}(\pi(x)) = x$ e $\pi(\pi^{-1}(y)) = y$.

- Verificare che $\pi^{-1} : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{N\}$ è una applicazione conforme.