1 Osservazioni sul teorema di Schwarz

Vogliamo mostrare con un esempio che le ipotesi del teorema di Schwarz sono necessarie. Il teorema di Schwarz dice che se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione e $p \in \mathbb{R}^2$, allora se $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}$ esistono e sono continue in un intorno D del punto p si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$$

Consideriamo la funzione f definita come segue

$$f(x,\, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,\, y) \neq (0,\, 0) \\ 0 & \text{se } (x,\, y) = (0,\, 0) \end{cases}$$

Si vede subito che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, y) = y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mentre essendo f identicamente nulla sugli assi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,\, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,\, 0) = 0$. Inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y) = x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\, y) = -y \quad \text{e quindi} \quad \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(0,\, 0) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, 0) = x \quad \text{e quindi} \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(0,\, 0) = 1$$

Si verifica facilmente che $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}$ non sono continue in $(0,\, 0)$.

- Disegnare la curva di livello $f(x,\, y) = 0$ e discutere la sua esplicitabilità locale come grafico.

2 Studio di massimi e minimi di funzioni a più variabili

- Studiare massimi e minimi della funzione $f(x,\, y) = x^2 + (y-1)^2$ definita su $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y - 1 \leq 0\}$.
  Studiamo dapprima i punti stazionari di f nella parte interna di D. Si ha $\nabla f(x,\, y) = (2x,\, 2(y-1))$, quindi c'è un unico punto stazionario

che è $(0,\, 1)$ (effettivamente $(0,\, 1)$ sta nella parte interna di D). Per decidere se sia eventualmente un massimo o un minimo, calcoliamo la matrice hessiana di f:

$$H(f)(x,\, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quindi $H(f)$ è definita positiva in $(0,\, 1)$: allora f ha un minimo locale in $(0,\, 1)$ e $f(0,\, 1) = 0$. Osserviamo che deve trattarsi anche di un minimo globale, visto che $f \geq 0$. Studiamo ora eventuali punti di massimo o di minimo sul bordo di f: tale bordo è definito da $g(x,\, y) = 0$ con $g(x,\, y) = x^2 - y - 1$. Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: cerchiamo cioè gli $(x,\, y) \in D$ per i quali esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \nabla f(x,\, y) & = & \lambda \cdot \nabla g(x,\, y) \\ g(x,\, y) & = & 0 \end{cases}$$

Nel nostro caso questo sistema si riscrive

$$\begin{cases} 2x & = & 2\lambda x \\ 2y - 2 & = & -\lambda \\ x^2 - y - 1 & = & 0 \end{cases}$$

Se $x \neq 0$, otteniamo $\lambda = 1$, $y = 1/2$ e quindi $x = \sqrt{3}/2$. Se $x = 0$, il sistema è soddisfatto se e solo se $y = -1$ (e in quel caso, $\lambda = 4$). Quindi le soluzioni del sistema sono $(0,\, -1)$ e $(\sqrt{3}/2,\, 1/2)$. A questo punto possiamo solo dire che questi punto potrebbero essere di minimo locale (ma non globale) oppure di massimo locale (e magari globale). Sappiamo che $f(0,\, -1) = 4$ e $f(\sqrt{3}/2,\, 1/2) = 1$ (quindi di sicuro il secondo punto non è di massimo globale). Vediamo come possiamo escludere il fatto che $(0,\, -1)$ e $(\sqrt{3}/2,\, 1/2)$ siano di massimo locale. Se fossero massimi locali, esisterebbe un loro intorno in cui sono massimi. Studiamo la funzione f sulla curva $g = 0$: f diventa allora una funzione della sola variabile y, cioè

$$f(x,\, y) = x^2 + (y-1)^2 = (y+1) + (y-1)^2$$

appunto perché su $g = 0$, si ha $x^2 = y + 1$. Se $g(x,\, y) = 0$, allora $y \geq -1$; viceversa se $y \geq -1$, posso trovare x tale che $g(x,\, y) = 0$. Quindi f ristretta a $g = 0$ è definita per $y \geq -1$: questa funzione ha un massimo locale per $y = -1$ (che corrisponde al punto $(0,\, -1)$) e ha un minimo globale per $y = 1/2$ (che corrisponde al punto $(\sqrt{3}/2,\, 1/2)$). Quindi $(0,\, -1)$ può essere di massimo locale (ma non di minimo locale né di massimo globale) e $(\sqrt{3}/2,\, 1/2)$ può essere di minimo locale (ma non di massimo locale).

- Studiare massimi e minimi della funzione $f(x, y) = -x^2 - 3y^2$ definita su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy \leq 1\}$ e su $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy < 1\}$. (Soluzione: su D, f non ha minimi locali e ha due punti di massimo globale che sono $(\sqrt[4]{3},\, 1/\sqrt[4]{3})$ e $(-\sqrt[4]{3},\, -1/\sqrt[4]{3})$; su E, f non ha minimi locali e ha un punto di massimo globale che è $(0, 0)$).

- Sia p un numero reale positivo: determinare quale sia il rettangolo di perimetro $2p$ la cui area è massima.

- Trovare i massimi della funzione $x^2 + y^2$ sull'insieme $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leq x,\, y \leq 1\}$.

- Trovare massimi e minimi globali della funzione $f(x, y) = xy$ su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x^2 + y^2 = 8\}$ (tali massimi e minimi esistono perché D è compatto e f è continua).

- Stesso esercizio come al punto precedente con $f(x, y) = x^2 + 3xy - 2y^2$ e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 5y^2 = 1\}$

3 Integrazione con cambiamento di variabile

- Calcolare
$$\int_D x^2 y^2 dx\, dy$$
dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy > 1,\, xy < 2,\, y > x/2,\, y < x/2\}$, utilizzando il cambiamento di coordinate $u = xy$, $v = y/x$. Si tratta di calcolare quindi l'integrale
$$\int_{\widetilde{D}} \frac{u^2}{v} dv du = \int_1^2 \left(\int_{1/2}^2 \frac{u^2}{v} dv \right) du$$
perché
$$\frac{1}{v} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1}$$
e D viene trasformato in $\widetilde{D} = \{1 \leq u \leq 2,\, 1/2 \leq v \leq 2\}$.

- Vogliamo studiare l'integrale della funzione $f(x, y) = x^2$ sul disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. La simmetria radiale di D ci suggerisce di utilizzare le coordinate polari: otteniamo (in virtù del teorema di cambiamento delle variabili nell'integrazione e del teorema di Fubini-Tonelli)
$$\int_D x^2 dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^3 \cos^2 \theta d\theta \right) d\rho$$

Calcoliamo il secondo integrale: osserviamo che, integrando per parti,

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \left[\sin^2 \theta\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} - \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta - \int_0^{2\pi} d\theta$$

che dà

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi$$

Quindi

$$\int_D x^2 dx\, dy = \int_0^1 \pi \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{4}$$

Consideriamo ora il campo vettoriale

$$V(x,\, y) = (-x^2 y, y) = (V_1(x,\, y),\, V_2(x,\, y))$$

Scegliamo la curva parametrica

$$\gamma(t) = (\cos t,\, \sin t) = (\gamma_1(t),\, \gamma_2(t))$$

il cui supporto è la circonferenza di raggio 1, cioè il bordo di D. Calcoliamo l'integrale di V su γ:

$$\int_\gamma V d\gamma = \int_0^1 V_1(\gamma_1(t),\, \gamma_2(t))\gamma_1'(t)dt + \int_0^1 V_2(\gamma_1(t),\, \gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t + \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2t}{4} dt + \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2t}{2} dt = \frac{\pi}{8}$$

Osserviamo che

$$\int_D f(x,\, y) dx\, dy = \int_\gamma V d\gamma \tag{1}$$

e non solo γ è il bordo di D (scriviamo $\gamma = \partial D$) ma f e V sono collegati dalla relazione

$$f(x,\, y) = \left(\frac{\partial V_2(x,\, y)}{\partial x} - \frac{\partial V_1(x,\, y)}{\partial y} \right)$$

L'uguaglianza in (1) non è una coincidenza: si tratta di un caso particolare del seguente teorema

Teorema 1. *(Formula di Green) Sia $V(x,\, y) = (V_1(x,\, y),\, V_2(x,\, y))$ un campo vettoriale derivabile con derivata continua su un aperto $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Sia $D \subseteq E$ un aperto la cui chiusura sia contenuta in E e il cui bordo sia una curva chiusa γ regolare a tratti[1]. Allora*

$$\int_\gamma V d\gamma = \int_D \left(\frac{\partial V_2(x,\, y)}{\partial x} - \frac{\partial V_1(x,\, y)}{\partial y} \right) dx\, dy$$

[1] Una curva continua $\gamma : [0,\, 1] \to \mathbb{R}^2$ è regolare a tratti se esistono $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$ tali che γ ristretta a $(a_i,\, a_{i+1})$ è regolare per ogni $i = 0,\, n-1$.