Matematica, Anno Accademico 2007-2008, Scienze Geologiche

L. Caputo, D.Iacopini, V.M. Tortorelli

Seconda prova scritta **A**

11 febbraio 2008

ISTRUZIONI

a: dopo aver scritto nome cognome e numero di matricola,

b: giustificando i principali passaggi si risolvano i seguenti esercizi riportando le soluzioni sul presente foglio:

c: l'unico da consegnare.

ESERCIZIO 1. Dati $y \geq x > 0$ si calcoli l'area $A(x, y)$ della superficie parametrica

$$]0, 2\pi[\times]-\pi, \pi[\ \ni (\varphi, \theta) \mapsto (\cos\varphi(y + x\sin\theta), \sin\varphi(y + x\sin\theta), x\cos\theta)$$

ESERCIZIO 2. Si determinino i valori di estremo superiore ed inferiore di xy quando $0 \leq \frac{1}{x} + x \leq y$.

ESERCIZIO 3 Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale: $\frac{dx}{dt}(t) = \tan(x(t))$ e se ne disegnino approssimativamente i grafici.

---

1) $\Phi(\varphi,\theta) = (\cos\varphi(y+x\sin\theta), \sin\varphi(y+x\sin\theta), x\cos\theta) \quad (\varphi,\theta) \in [0,2\pi]\times[-\pi,\pi]$

$$\text{Area} = \iint_{[0,2\pi]\times[-\pi,\pi]} \sqrt{\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial\theta}\end{pmatrix}}\, d\varphi\, d\theta =$$

$$\begin{pmatrix} \partial_\varphi\Phi_1 & \partial_\theta\Phi_1 \\ \partial_\varphi\Phi_2 & \partial_\theta\Phi_2 \\ \partial_\varphi\Phi_3 & \partial_\theta\Phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi(y+x\sin\theta) & \cos\varphi\cdot x\cdot\cos\theta \\ \cos\varphi(y+x\sin\theta) & \sin\varphi\cdot x\cdot\cos\theta \\ 0 & -x\sin\theta \end{pmatrix} = A$$

$$\det {}^tAA = \det\begin{bmatrix} \sin^2\varphi(y+x\sin\theta)^2 + \cos^2\varphi(y+x\sin\theta)^2 & 0 \\ \cancel{-\sin\varphi\cos\varphi(y+x\sin\theta)x\cos\theta + \cos\varphi\sin\varphi(y+x\sin\theta)\cdot x\cos\theta}\ 0 & \cos^2\varphi\, x^2\cos^2\theta + \sin^2\varphi\, x^2\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} (y+x\sin\theta)^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{bmatrix} = x^2(y+x\sin\theta)^2$$

$y \geq x > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y + x\sin\theta \geq 0$

$$\text{Area} = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(y+x\sin\theta)\, d\varphi\, d\theta = 2\pi\int_{-\pi}^{\pi}(xy + x^2\sin\theta)\, d\theta =$$

$$= 4\pi^2 xy + 2\pi x^2 \cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\sin\theta\, d\theta} = 4\pi^2 xy$$