Matematica, Anno Accademico 2007-2008, Scienze Geologiche
L. Caputo, D.Iacopini, V.M. Tortorelli
Seconda prova scritta **A**
11 febbraio 2008

ISTRUZIONI

a: dopo aver scritto nome cognome e numero di matricola,

b: giustificando i principali passaggi si risolvano i seguenti esercizi riportando le soluzioni sul presente foglio:

c: l'unico da consegnare.

ESERCIZIO 1. Dati $y \geq x > 0$ si calcoli l'area $A(x, y)$ della superficie parametrica

$$]0, 2\pi[\times]-\pi, \pi[\ \ni (\varphi, \theta) \mapsto (\cos\varphi(y + x\sin\theta), \sin\varphi(y + x\sin\theta), x\cos\theta)$$

ESERCIZIO 2. Si determinino i valori di estremo superiore ed inferiore di xy quando $0 \leq \frac{1}{x} + x \leq y$.

ESERCIZIO 3 Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale: $\frac{dx}{dt}(t) = \tan(x(t))$ e se ne disegnino approssimativamente i grafici.

---

2) $f(x,y) = xy$. $f(1,y) = y$: se $y \geq \frac{1}{1} + 1 = 2 > 0$ si ha

$\sup_{y \geq \frac{1}{x}+x>0} f(x,y) \geq \sup_{y \geq 2} y = +\infty$. D'altronde $f(x, \frac{1}{x}+x) = 1+x^2$, $x>0$

$\inf_{\substack{y \geq \frac{1}{x}+x \geq 0 \\ x>0}} f(x,y) \leq \inf_{\substack{y=\frac{1}{x}+x \\ x>0}} f(x,y) = \inf_{x>0} 1+x^2 = 1$, e essendo $x>0$

$\inf_{\substack{y \geq \frac{1}{x}+x \\ x>0}} f(x,y) = \inf_{\substack{y \geq \frac{1}{x}+x \\ x>0}} xy \geq \inf_{\substack{y \geq \frac{1}{x}+x \\ x>0}} x\left(\frac{1}{x}+x\right) = \inf_{x>0} 1+x^2 = 1$

Tale estremo inferiore non è minimo nel dominio dato, poichè se $f(x,y) = xy = 1$ allora $y = \frac{1}{x}$, ma dev'essere $y \geq \frac{1}{x} + x$.

3) • Le $x(t) \equiv k\pi$ sono soluzioni costanti, e non possono essere intersecate da altre soluzioni in tempo finito per unicità

• Se $x(t)$ è soluzione anche $x(t+c)$ lo è. Poichè $tg\, P$ è π-periodica se $x(t)$ è sol. anche $x(t)+k\pi$ lo è.

• Poichè $tg -P = -tg\, P$ se $x(t)$ è sol anche $-x(t)$ lo è

• Basta studiare le soluzioni $0 \leq x(t) \leq \frac{\pi}{2}$: $x'(t) = tg\, x(t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 = \frac{\cos x(t)}{\sin x(t)} x'(t) = (\log \sin x(t))'$ $\quad t = \log \frac{\sin x(t)}{\sin x(0)}$

$e^t \sin x(0) = \sin x(t)$ dev'essere $t \leq \log \frac{1}{\sin(x_0)}$

$\arcsin(e^t \sin x(0)) = x(t)$, $t \leq \log \frac{1}{\sin x_0}$ $\quad 0 < x(0) < \frac{\pi}{2}$