Matematica, Anno Accademico 2007-2008, Scienze Geologiche

L. Caputo, D.Iacopini, V.M. Tortorelli

Seconda prova scritta **B**

11 febbraio 2008

ISTRUZIONI

a: dopo aver scritto nome cognome e numero di matricola,

b: giustificando i principali passaggi si risolvano i seguenti esercizi riportando le soluzioni sul presente foglio:

c: l'unico da consegnare.

ESERCIZIO 1. Si calcoli l'area della regione determinata dalle condizioni $x^2 + z^2 = 4$, $-1 \le y \le x + z + 1$.

ESERCIZIO 2-a Si trovino le soluzioni del sistema differenziale:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

2-b Si disegni in modo approssimativo il comportamento delle traiettorie del sistema, mettendo in risalto eventuali comportamenti notevoli.

---

2) a. Se $(x(t), y(t))$ è soluzione allora la $x(t)$ e la $y(t)$ sono soluzione di $z''(t) - tr\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}z'(t) + det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}z(t) = 0$

$z''(t) - 3z'(t) + z(t) = 0$ $\quad \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ $\quad \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$ $\quad \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x(t) = a e^{\frac{3+\sqrt5}{2}t} + b e^{\frac{3-\sqrt5}{2}t}$

$x'(t) = a \frac{3+\sqrt5}{2} e^{\frac{3+\sqrt5}{2}t} + b \frac{3-\sqrt5}{2} e^{\frac{3-\sqrt5}{2}t}$

$y(t) = x'(t) - x(t) = a e^{\frac{3+\sqrt5}{2}t}\left(\frac{3+\sqrt5}{2} - 1\right) + b e^{\frac{3-\sqrt5}{2}t}\left(\frac{3-\sqrt5}{2} - 1\right)$

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a e^{\frac{3+\sqrt5}{2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt5}{2}\end{pmatrix} + b e^{\frac{3-\sqrt5}{2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt5}{2}\end{pmatrix}$

2) b Gli autovalori della matrice $\frac{3+\sqrt5}{2} \gneqq \frac{3-\sqrt5}{2} \gneqq 0$ di autovettori $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt5}{2}\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt5}{2}\end{pmatrix}$ rispettivamente.

Quindi l'origine è un nodo instabile e le traiettorie sono del tipo