Matematica, Anno Accademico 2007-2008, Scienze Geologiche

L. Caputo, D.Iacopini, V.M. Tortorelli

Seconda prova scritta **C**

11 febbraio 2008

ISTRUZIONI

a: dopo aver scritto nome cognome e numero di matricola,

b: giustificando i principali passaggi si risolvano i seguenti esercizi riportando le soluzioni sul presente foglio:

c: l'unico da consegnare.

ESERCIZIO 1 Si calcoli l'area del grafico della funzione $f(x,y) = xe^y$ sul dominio
$1 \leq e^{2y} + x^2e^{2y} \leq 4$, $|x| \leq 1$

[Si consiglia un primo cambiamento di variabili: $u = e^y$, $v = xe^y$]

ESERCIZIO 2 Si trovino la soluzione del problema differenziale:

$$\begin{cases} x''(t) = x(t) - 9 \\ x(-1) = x(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

---

1) Area grafico di f su D $= \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy = \iint_{\substack{1\le e^{2y}+x^2e^{2y}\le 4\\ |x|\le 1}} \sqrt{1+e^{2y}+x^2e^{2y}}\,dx\,dy$

CAMBIO VARIABILI

$\phi(x,y) = (e^y, xe^y)$ $\quad u = e^y,\ v = xe^y$ $\quad y = \lg u,\ x = \frac{v}{u}$ $\quad \phi^{-1}(u,v) = \left(\frac{v}{u}, \lg u\right)$

$J\phi^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \\ \frac{1}{u} & 0 \end{pmatrix}$ $\quad |\det J\phi^{-1}| = \frac{1}{u^2}$ $\quad \phi(\{(x,y) : |x| \le 1 \le e^{2y}+x^2e^{2y} \le 4\}) =$

$= \{(u,v) : u \geq |v|,\ 1 \le u^2+v^2 \le 4\}$

$= \iint_{\substack{1\le u^2+v^2\le 4\\ u\ge|v|}} \sqrt{1+u^2+v^2}\,\frac{1}{u^2}\,du\,dv \underset{\substack{\text{COORDINATE POLARI}\\ u=\rho\cos\varphi\\ v=\rho\sin\varphi}}{=} \iint_{\substack{1\le\rho\le 2\\ -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}}} \sqrt{1+\rho^2}\,\frac{1}{\rho^2\cos^2\varphi}\,\rho\,d\rho\,d\varphi$

$\underset{\substack{\text{INTEGRAZIONE}\\ \text{ITERATA}}}{=} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\varphi}\,d\varphi \int_1^2 \frac{\sqrt{1+\rho^2}}{\rho^2}\,\rho\,d\rho \underset{\substack{(\operatorname{tg}\varphi)' = \frac{1}{\cos^2\varphi}\\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1}}{=} 2\int_1^2 \frac{\sqrt{1+\rho^2}}{\rho^2}\,\rho\,d\rho \underset{\substack{\text{CAMBIO VARIABILE}\\ s=\rho^2}}{=}$

$= \int_1^4 \frac{\sqrt{1+s}}{s}\,ds \underset{\substack{\text{cambio VARIABILE}\\ t=\sqrt{1+s}\\ t^2-1=s}}{=} \int_1^4 \frac{2(1+s)}{s}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+s}}\,ds\right) = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{t^2}{t^2-1}\,dt =$

$= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt = 2(\sqrt{5}-\sqrt{2}) + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = 2(\sqrt{5}-\sqrt{2}) +$
$+ \log\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\,\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$