Matematica, Anno Accademico 2007-2008, Scienze Geologiche

Compendio sui numeri complessi V.M. Tortorelli

20 novembre 2007

Numeri complessi

• Con sistema dei numeri complessi si intende l'uso della regola di calcolo $i^2 = -1$, ove i è una costante *non reale*, con le espressioni $a + ib$ ove $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$: *si aggiunge cioè una soluzione dell'equazione* $x^2 + 1 = 0$ che non ha soluzioni in $\mathbf{R}$. Come si vedrà sotto, facendo ciò accade in particolare che si aggiungano le radici di ogni grado di ogni numero reale e gli "zeri" a ogni polinomio con coefficienti reali.

I numeri reali a si identificano con i numeri complessi del tipo $a+i0$. Quelli del tipo $0+ib$ indicati con ib si chiamano numeri *immaginari puri*.

Se $a+ib = z$ è un numero complesso $\mathcal{R}e z = a$ ed $\mathcal{I}m z = b$ si dicono rispettivamente parte reale e parte immaginaria di z.

Somma e prodotto di numeri complessi sono quindi quelli dei *polinomi a coefficienti reali* nella variabile i, solo che nei calcoli si usa la regola data per ridursi sempre a polinomi di *primo grado*:

$$(a + ib) + (x + iy) = (a + x) + i(b + y);$$

$$(a + ib)(x + iy) = ax + aiy + ibx + ibiy = ax + iay + ibx + i^2by = (ax - by) + i(ay + bx)$$

Quindi ogni numero complesso $a + ib$ nonullo ha un reciproco $\frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{1}{a+ib}$, e il prodotto di due numeri complessi non nulli è non nullo (si possono semplificare le eguaglianze).

Considerando l'insieme dei numeri complessi con tali operazioni si parla di *campo* dei numeri complessi, che si indica con $\mathbf{C}$. Quindi con i numeri complessi si fanno tutte le operazioni che si fanno con i numeri reali: si dice che i numeri complesssi sono *un'estensione* dei numeri reali come sistema con addizione e moltiplicazione, commutative e distributive, unità ed elemento neutro, inverso e opposto.

Si osserva che non si può estendere ai numeri complessi la relazione d'ordine che vi è tra i numeri reali in maniera coerente rispetto all'addizione e alla moltiplicazione ($0 = 1 - 1 = 1 + i^2 > i^2 > 0$ ma un quadrato è sempre non negativo).

• Spesso $\mathbf{C}$ si identifica con $\mathbf{R}^2$: $a + ib \sim (a, b)$ e ciò porta a interpretazioni geometriche: per esempio la somma di numeri complessi corrisponde alla somma di vettori (regola del parallelogramma).

Fissato $w = \alpha + i\beta$ *diverso da* 0, si considera la funzione $a + ib = z \to zw$ essa determina una funzione lineare da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ di tipo particolare:

$$zw = a\alpha - b\beta + i(b\alpha + a\beta) \sim \begin{pmatrix} a\alpha - b\beta \\ \\ b\alpha + a\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \\ b \end{pmatrix}$$

la matrice associata è qualla di una fuznione lineare che conserva gli angoli. In altri termini le trasformazioni del piano in se che conservano gli angoli tra curve sono rappresentate da trasformazionida $\mathbf{C}$ in se del tipo $z \mapsto wz + v$.

Il coniugato di un numero complesso $z = x + iy$ si indica con $\overline{z}$ ed è $x - iy$ (simmetrico rispetto all'asse orizzontale). Per il prodotto tra $z = a + ib$ e il coniugato di $w = \alpha + i\beta$ si osserva c

$$z\overline{w} = (a + ib)(\alpha - i\beta) = a\alpha + b\beta + i(b\alpha - a\beta) = (a, b)\bullet(\alpha, \beta) \ - \ i\det \begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{pmatrix}$$

Il modulo di un numero complesso $z = x+iy$ è la distanza dall'origine del corrispondente punto nel piano cartesiano $\sqrt{x^2 + y^2}$ e si indica con $|z|$. Si ha:

$$z \in \mathbf{R} \text{ se e solo se } \overline{z}z; \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}; \quad \overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$$

$$|zw| = |z||w|,\ |z+w| \leq |z| + |w|; \quad |z|^2 = z\overline{z},\ z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Convergenza La convergenza di numeri complessi è quella delle coppie di numeri reali associati: in particolare $z_n \to z$ è $|z_n - z| \to 0$. Quindi una successione o funzione a valori complessi converge ad un limite $l \in \mathbf{C}$ se e solo se le due successioni o le funzioni date delle parti reali ed immaginarie convergono rispettivamentea $\mathcal{R}eL$ e $\mathcal{I}mL$.

Forma trigonometrica Considerando le coordinate polari nel piano ogni numero complesso si scrive nella forma $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. L'angolo φ non è individuato se non a meno di multipli di 2π: *e.g.* se $a > 0$, $b > 0$ allora $a + ib = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\ \text{artan}\frac{b}{a} + \sin\ \text{artan}\frac{b}{a})$. Appunto ρ si dirà modulo di un numero complesso, e $\varphi \in [0; 2\pi[$ argomento principale.

Dalle formule di addizione se $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ si ha:

$$(\mathbf{*}) zw = \rho r(\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta))$$

Radici n^e Quindi ogni numero complesso $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ha esattamente n radici n^e complesse

$$z_1 = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}) \ldots z_n = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{2\pi(n-1)}{n} + \frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(n-1)}{n} + \frac{\varphi}{n}\right)\right)$$

Le radici n^e di 1 sono quindi i vertici di un poligono regolare inscritto nella circonferenza untitaria.

Forma esponenziale Considerando il modulo di un numero complesso come esponenziale e osservando che **(*)** il prodotto di numeri complessi ha come argomento la somma degli argomenti riportata in $[0; 2\pi[$ si definisce $e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta) = e^{\alpha}e^{i\beta}$ constatando che ha le stesse regole di calcolo dell'esponenziale!

Si ha inoltre $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

Si hanno a disposizione tutti gli srumenti (una funzione continua in due variabili assume valori di massimo e minimo su rettangoli chiusi) per dare una dimostrazione del seguente teorema (la si omette).

Teorema 1 FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA Ogni polinomio a coefficienti complessi $a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n$ di grado n è prodotto di termini del tipo $(z-w)^k$ per a_n. I numeri w sono tutte e sole le radici del polinomio, i numeri k sono le rispettive molteplicità e la loro somma è n.

Poichè un polinomio a coefficienti reali se ha come radice $w = a + ib$ ha anche come radice $a - ib$ si ha che un polinomio a coefficienti reali si scrive come prodotto di termini del tipo $(x-c)^k$, $((x-a)^2+b^2)^h = (x-(a+ib))^h(x-(a-ib))^h$, ove c sono le radici reali e la somma degli k e dei $2h$ è il grado del polinomio.

Integrali

- Una funzione $g : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ si identifica con la funzione $\tilde{g} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$: $\tilde{g}(a,b) = g(a+ib)$.

  Una funzione $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ si identifica con il cammino $\tilde{\gamma} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$: $\tilde{g}(t) = (\alpha(t), \beta(t)$.

  Un fuzione $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(a+ib) = h(a+ib) + ik(a+ib)$ si identifica con $\tilde{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$: $\tilde{f}(a,b) = (h(a,b), k(a,b))$.

  Una funzione a valori o definita sui complessi sarà *continua* se e solo se lo è la funzione associata. Un *cammino* a valori complessi sarà *derivabile* se e solo se lo è il cammino associato cioè se e solo se lo sono le due funzioni che danno la parte reale ed immaginaria.

  Dato un cammino $\gamma : [A,B] \to \mathbf{C}$, $\gamma = \alpha + i\beta$ C^1 a tratti, e una funzione $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f \sim (h,k)$ si definisce l'integrale di f su γ:

$$\int_\gamma f(z)dz =: \int_A^B f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

esso è eguale al numero complesso dato dalla coppia degli integrali su γ dei vettori $(h,-k)$ e (k,h):

$$\int_A^B [h(\gamma(t))\alpha'(t) - k(\gamma(t))\beta'(t)]\, dt + i\int_A^B [h(\gamma(t))\beta'(t) + k(\gamma(t))\alpha'(t)]\, dt$$

Derivate Per le funzioni definite su $\mathbf{C}$ a valori in $\mathbf{C}$ vi è un immediata nozione di derivabilità una funzione $f:\mathbf{C}\to C$, $f(a+ib) = h(a+ib) + ik(a+ib)$ si dice derivabile in z se esiste il limite per $w = u+iv \to 0$ del rapporto incrementale:

$$\lim_{w\to 0}\frac{f(z+w)-f(z)}{w} = \lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{h(a+u,b+v)-h(a,v)+i(k(a+u,b+v)-k(a,b))}{u+iv} =$$

$$\lim_{u^2+v^2\to 0}\frac{[h(a+u,b+v)-h(a,b)+i(k(a+u,b+v)-k(a,b))](u-iv)}{u^2+v^2}$$

Tale limite si indica con $\frac{df}{dz}(z) = f'(z)$. Se esiste inoltre si ha in particolare considerando $w = u \in \mathbf{R}$

$$(**) \qquad f'(z) = \frac{\partial h}{\partial a}(a,b) + i\frac{\partial k}{\partial a}(a,b)$$

ove la derivata , detta derivata parziale, $\frac{\partial g}{\partial a}(a,b)$ è la derivata della funzione nella variabile a tenendo b fisso $\varphi(a) = g(a,b)$. Analogamente $\frac{\partial g}{\partial b}(a,b)$ è la derivata della funzione nella variabile b tenendo a fisso $\psi(b) = g(a,b)$.

Per le derivate in senso complesso valgono le usuali regole in particolare la regola della derivata della funzione comporta.

- Questa nozione di derivata di una funzione di variabile complessa a valori complessi è molto più qualificante che l'esitenza delle derivate rispetto alle variabile a e rispetto alla variabile b, (derivate parziali), delle funzioni componenti $f(a+ib) \sim (h(a,b),k(a,b))$.

Considerando la definizione di derivata complessa essa è equivalente all'approssimazione di f con una funzione $\mathbf{C}$-lineare ovvero con il prodotto per $f'(z)$

$$f(z+w) = f(z) + f'(z)w + o(w)$$

si ottiene che le funzioni derivabili in senso complesso sono approssimabili con le funzioni del piano in se che conservano gli angoli laddove $f'(z) \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} h(a+u,b+v) \\ \\ k(a+u,b+v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(a,b) \\ \\ k(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R}e f'(a,b) & -\mathcal{I}m f'(a,b) \\ \\ \mathcal{I}m f'(a,b) & \mathcal{R}e f'(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \\ v \end{pmatrix} + o(\sqrt{u^2+v^2})$$

Un'altro modo di vedere che l'esistenza della derivata complessa è una condizione molto particolare e considerare adesso nel limite che definisce la derivata $u = 0$. Si ottiene:

$$(***) \quad f'(z) = \frac{\partial k}{\partial b}(a,b) - i\frac{\partial h}{\partial b}(a,b)$$

da cui eguagliando le parti reale ed immaginaria con quelle ottenute dall si ottengono le equazioni di *Cauchy-Riemann* che devono soddisfare la parte reale e la parte immaginaria di una funzione *derivabile in senso complesso* e di *variabile complessa*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial k}{\partial b} = \dfrac{\partial h}{\partial a} = \mathcal{R}e f' \\ \\ -\dfrac{\partial h}{\partial b} = \dfrac{\partial k}{\partial a} = \mathcal{I}m f' \end{cases}$$

Queste condizioni non solo sono necessarie per la derivabiltà in senso complesso ma sono altresıśufficienti.

Altre importanti caratterizzazioni delle funzioni derivabili in senso complesso sono le seguenti

- una funzione f continua è derivabile in senso complesso in tutti i punti di un disco $D \subset \mathbf{C}$ se e solo se dato un cammino $\gamma : [A, B] \to D$, $\gamma = \alpha + i\beta$ C^1 a tratti, che sia chiuso $\gamma(A) = \gamma(B)$ si ha

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

- una funzione f è derivabile in senso complesso se e solo è derivabile inifinite volte se e solo se dato z_0 vi è r

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f}{dz^n}(z_0) \frac{(z - z_0)^n}{n!}, \;\; |z - z_0| < r$$

Vale inoltre la seguente formula di Cauchy: se $\gamma(t) = z_0 + r\cos t + ir\sin t, \;\; t \in [0, 2\pi]$ la circonferenza di centro z_0 di raggio r percorsa una sola volta

$$\frac{d^n f}{dz^n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} dz$$