Matematica, Anno Accademico 2007-2008, Scienze Geologiche
L. Caputo, D.Iacopini, V.M. Tortorelli
Prima prova scritta **A**
22 gennaio 2008

ISTRUZIONI

a: dopo aver scritto nome cognome e numero di matricola,

b: giustificando i principali passaggi si risolvano i seguenti esercizi riportando le soluzioni sul presente foglio:

c: l'unico da consegnare.

ESERCIZIO 1. Si determinino i valori di massimo e minimo della funzione $x^2 - 3xy - z$ quando $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

ESERCIZIO 2. Integrare la funzione $\sqrt{x^2+y^2}z$ sulla superficie parametrica

$$]0, 2\pi[\times \left]-\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ni (\varphi,\theta) \mapsto (\cos\varphi(3+\sin\theta), \sin\varphi(3+\sin\theta), \cos\theta)$$

ESERCIZIO 3-a. Si risolva il problema ai dati iniziali per il sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \\ x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$$

3-b Si disegni in modo approssimativo il comportamento delle traiettorie del sistema, mettendo in risalto eventuali comportamenti notevoli.

---

1 La funzione $(x,y,z) \longmapsto x^2 - 3xy - z$ è continua, $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=4\}$ è chiuso è limitato, per il teorema di Weiestass la funzione assume su l'insieme valori massimo e minimo.

Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange poichè $\nabla(x^2+y^2+z^2) = 2(x,y,z) \neq (0,0,0)$ se $x^2+y^2+z^2=4 \neq 0$ i punti ove la funzione assume i valori cercati risolvono:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2\lambda x & \Rightarrow y = x\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\lambda\right) \Rightarrow x\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\lambda+\frac{3}{2\lambda}\right)=0 \\ -3x = 2\lambda y & \Rightarrow y = -\frac{3}{2\lambda}x \\ -1 = 2\lambda z & \Rightarrow \lambda \neq 0 \quad z = -\frac{1}{2\lambda}, \ \lambda = -\frac{1}{2z} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

- se $x=0$ dalla seconda equazione si ha, poichè $\lambda \neq 0$, $y=0$ e quindi dalla quarta $z^2=4$ ovvero $z=2$ o $z=-2$ (e dalla terza $\lambda = -\frac{1}{4}$ o $\lambda = \frac{1}{4}$) per cui i valori corrispondenti della funzione in $(0,0,2)$ e $(0,0,-2)$ sono rispettivamente -2 e 2.
- se $x \neq 0$ deve essere $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\lambda + \frac{3}{2\lambda} = 0$ ovvero $4\lambda - 4\lambda^2 + 9 = 0$ ovvero $4\lambda^2 - 4\lambda + 9 = 0$ che non ha soluzioni $4\lambda^2 - 4\lambda + 9 \underset{\neq}{>} 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda-1)^2 \geqslant 0$

Quindi il valore <u>massimo è 2</u> e il valore <u>minimo è -2</u>.