

ISTRUZIONI

- a: dopo aver scritto nome cognome e numero di matricola,
- b: giustificando i principali passaggi si risolvano i seguenti esercizi riportando le soluzioni sul presente foglio:
- c: l'unico da consegnare.

ESERCIZIO 1. Si determinino i valori di massimo e minimo della funzione  $x^2 - 3xy - z$  quando  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

ESERCIZIO 2. Integrare la funzione  $\sqrt{x^2 + y^2}z$  sulla superficie parametrica  $]0, 2\pi[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \ni (\varphi, \theta) \mapsto (\cos \varphi(3 + \sin \theta), \sin \varphi(3 + \sin \theta), \cos \theta)$

ESERCIZIO 3-a. Si risolva il problema ai dati iniziali per il sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \\ x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$$

3-b Si disegni in modo approssimativo il comportamento delle traiettorie del sistema, mettendo in risalto eventuali comportamenti notevoli.

$$\Sigma(\varphi, \theta) = (\cos \varphi(3 + \sin \theta), \sin \varphi(3 + \sin \theta), \cos \theta) \quad \begin{matrix} 0 \leq \varphi < 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot z$$

$$I = \int_{\Sigma} f dV_{\Sigma} = \iint_{(0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} f(\Sigma(\varphi, \theta)) \sqrt{\det {}^t D\Sigma D\Sigma} d\varphi d\theta$$

$$D\Sigma = \begin{pmatrix} -\sin \varphi(3 + \sin \theta) & \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi(3 + \sin \theta) & \sin \varphi \cos \theta \\ 0 & -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad {}^t D\Sigma D\Sigma = \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi(3 + \sin \theta)^2 & 0 \\ \cos^2 \varphi(3 + \sin \theta)^2 & 0 \\ 0 & \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (3 + \sin \theta)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det {}^t D\Sigma D\Sigma = (3 + \sin \theta)^2 \quad 3 + \sin \theta \geq 2 > 0$$

$$I = \iint_{(0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \sqrt{\cos^2 \varphi(3 + \sin \theta)^2 + \sin^2 \varphi(3 + \sin \theta)^2} \cdot \cos \theta \sqrt{(3 + \sin \theta)^2} d\varphi d\theta =$$

$$= \iint_{(0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} (3 + \sin \theta)^2 \cdot \cos \theta d\varphi d\theta = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 + \sin \theta)^2 \cos \theta d\theta \quad \begin{matrix} t = \sin \theta \\ dt = \cos \theta d\theta \end{matrix}$$

$$= 2\pi \int_{\sin(-\frac{\pi}{2})}^{\sin(\frac{\pi}{2})} (3 + t)^2 dt = 2\pi \int_{-1}^1 (3 + t)^2 dt = 2\pi \int_2^4 s^2 \frac{ds}{2} = 2\pi \left[ \frac{s^3}{3} \right]_2^4 =$$

$$= \frac{2\pi}{3} (64 - 8) = \frac{112}{3} \pi$$