Matematica, Anno Accademico 2007-2008, Scienze Geologiche

L. Caputo, D.Iacopini, V.M. Tortorelli

Prima prova scritta A

22 gennaio 2008

ISTRUZIONI

a: dopo aver scritto nome cognome e numero di matricola,

b: giustificando i principali passaggi si risolvano i seguenti esercizi riportando le soluzioni sul presente foglio:

c: l'unico da consegnare.

ESERCIZIO 1. Si determinino i valori di massimo e minimo della funzione $x^2 - 3xy - z$ quando $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

ESERCIZIO 2. Integrare la funzione $\sqrt{x^2+y^2}z$ sulla superficie parametrica

$$]0, 2\pi[\times\left]-\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ni (\varphi, \theta) \mapsto (\cos\varphi(3+\sin\theta), \sin\varphi(3+\sin\theta), \cos\theta)$$

ESERCIZIO 3-a. Si risolva il problema ai dati iniziali per il sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \\ x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$$

3-b Si disegni in modo approssimativo il comportamento delle traiettorie del sistema, mettendo in risalto eventuali comportamenti notevoli.

3.b Il sistema in forma matriciale è $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

con soluzioni $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

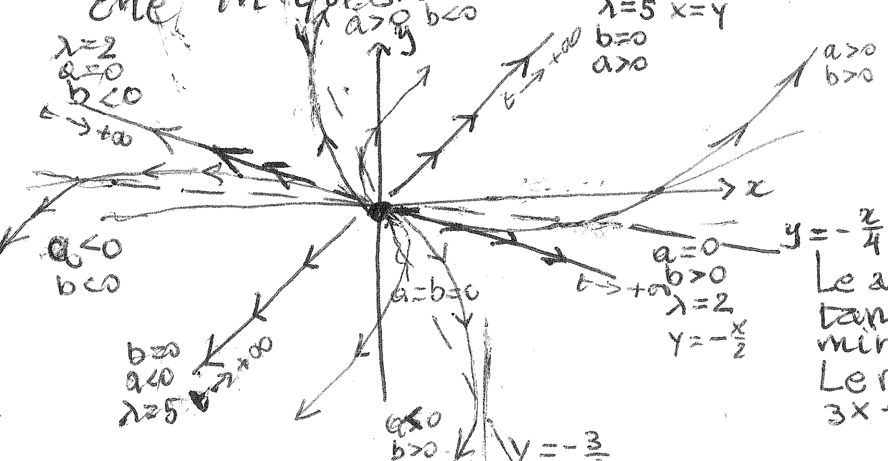
Il polinomio caratteristico della matrice è quello associato all'equazione caratteristica delle componenti $\lambda^2 - 7\lambda + 10$

Poiché le radici 5 e 2 son distinte si osserva che

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore relativo all'autovalore 5 $(b=0, a\neq 0)$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ è autovettore relativo all'autovalore 2 $(a=0, b\neq 0)$

Il comportamento delle traiettorie della generica $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ attorno alla soluzione stazionaria $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(a=0, b=0)$ che in questo caso si dice <u>nodo</u> è il seguente



$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha traiettoria $y=x$, $x>0$

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = -e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $y=x$, $x<0$

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $y=-\frac{x}{2}$, $x>0$

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = -e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $y=-\frac{x}{2}$ $x<0$

Le altre traiettorie sono per $t \to -\infty$ tangenti alla direzione di autovalore minore in modulo in (0,0)

Le rette di cambio di monotonia sono $3x+2y=0$ $x+4y=0$