Esercitazione del 16-11-2008
Integrali di funzioni Razionali
Integrale come misura di lunghezza di una curva.

Al fine di una migliore comprensione delle techniche di integrazione di funzioni razionali ho introdotto loro il concetto di integrazione mediante cambiamento di variabile e definito alcuni integrali fondamentali che verrano usati insistentemente nella soluzione di alcuni esercizi.

Sia f(t) funzione continua nell' intervallo [a,b] e φ(x) una funzione continua e derivabile sull intervallo [α,β], allora

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Se φ(x) oltre che continua e derivabile e' anche monotona , cioe applicazione biunivoca di [a,b] su [α,β] allora

$$\int_{[\alpha,\beta]} f(\varphi(x))\left|\varphi'(x)\right|dx = \int_{[a,b]} f(t)dt.$$

esempio del calcolo di integrale di

$$\int \frac{dx}{(3+2x)^3}dx$$

posto φ(x)= 3+2x
si ha

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\varphi^3(x)}\varphi'(x)\mathrm{dx} = \left[\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^3(x)}\right]_{t=\varphi(x)} = -\frac{1}{4\mathrm{t}^2} + \lambda = -\frac{1}{4\left(3+2\mathrm{x}\right)} + \lambda$$

Ho definito i seguenti integrali fondamentali:

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \text{ arctangx } +\lambda$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{x}}dx = \log\left|\mathrm{x}\right| + \lambda$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{x+a}}dx = \log\left|\mathrm{x+a}\right| + \lambda$$

funzioni razionali semplici:

$\int \frac{dx}{(x-a)^n}dx,$ per n ≥ 1.

$=\frac{1}{(1\text{-n})(\text{x-a})^{\text{n-1}}}.$

$\int \frac{dx}{x^2+ax+b}$

si distinguono tre casi:

caso in cui il polinomio x^2 + ax +b ha radice reale α di molteplicita' 2.
In tal caso :

$$\int \frac{dx}{x^2+ax+b} = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^2} = \frac{1}{x-\alpha} + \lambda$$

caso 2)

Polinomio x^2+ax+b ha due radici reali e distinte α e β.

In questo caso $\frac{1}{x^2+ax+b} = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\right),$
quindi,

$$\int \frac{1}{x^2+ax+c}dx = \frac{1}{\alpha-\beta}\int\left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\right)dx = \frac{1}{\alpha-\beta}\log\left|\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right|.$$

caso 3)

Il polinomio ha due radici complesse:
β = p+iq
β'= p – iq.

x^2+ax+b= (x-β)(x- β')=$(x\text{-p})^2$ + q^2

quindi

$$\int \frac{1}{x^2+ax+c}dx = \int\left(\frac{dx}{(x-p)^2+q^2}\right) = \frac{1}{q^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x-p}{q}\right)^2} = \left[\frac{1}{q}\int\frac{dt}{1+t^2}\right]_{t=\frac{x-p}{q}}$$

$$= \frac{1}{q}\arctan g(\frac{x-p}{q}) + \lambda$$

Caso generale:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

a) P(x) >Q(x).

In questo caso effettuo la divisione fra i due polinomi sapendo che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

dove R(x) rappresenta il resto.
Dopodiché risolvo l'integrale

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

b) Caso in cui grado di P(x) < grado di Q(x).
Useremo il metodo di equivalenza dei polinomi.
Possiamo distinguere tre casi :
1) Caso in cui le radici di Q(x) sono reali e distinte (con molteplicita' 1).
2) Caso in cui le radici di Q(x) sono immaginarie e distinte (con molteplicita' 1)
3) Caso in cui le radici di Q(x) sono reali o immaginarie con molteplicità >2.

Prima di introdurre alcuni esempi svolti e' necessario sapere che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{h} \frac{A_i}{(x-a_i)} + \frac{A_i}{(x-a_i)^m} + \sum_{j=1}^{k} \frac{B_j x + C_j}{\left((x-p_j)^2 + q^2{}_j\right)} + \frac{C_j x + D_j}{\left((x-p_j)^2 + q^2{}_j\right)^m}$$

$m, n > 1.$

dove i rapresenta la i-esima radice reale del polinomio, j la j-iesima radice immaginaria del polinomio mentre m ed n rappresentano rispettivamente le moltiplicita' delle radici reali e in questa relazione assumono sempre solo valori >1 altrimenti non vanno considerate. pj rappresenta la parte reale dell eventuale radice complessa β= p +iq ; q rappresenta la parte immaginaria dell eventuale radice complessa β= p +iq.
A mo' di esempio mostro come scomporre la funzione razionale :
sia

$$\frac{x^2+2}{x^2(x^2+1)^2}$$

il polinomio Q(x) di grado maggiore ha radici
$x_1 =$ 0 di molteplicita' due.
$x_2 =$ i di molteplicita' due.
$x_3 =$ -i di molteplicita' due.

$$\frac{x^2+2}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

nel caso in cui invece ho un polinomio del tipo:

$$\frac{dx}{x^3-1} = \frac{dx}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

le radici sono
x = 1,

$$x = \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

percio

$$\frac{dx}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)}$$

Sono stati risolti integralmente i seguenti integrali:

$$\int \frac{x^2+3x^2}{x^2+1}dx$$

$$\int \frac{x}{2x-1}dx$$

$$\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx$$

$$\int \frac{2x+3x+x^2}{x(x^2+1)}dx$$

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$$

$$\int \frac{x^2+2}{x^2(x^2+1)^2}dx$$

Infine e'stato introdotto il concetto di integrale di linea come misura di lunghezza di una curva:

L(φ)=$\int |\varphi'(\mathrm{t})|\,dt$ dove $|.|$ rappresenta la norma indotta dlla distanza.
Lunghezza del grafico di una funzione f : [a,b] → IR. In questo caso il grafico si puo scrivere come curva φ:[a,b]→IR^2

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ \text{con t } \in [\text{a,b}] \end{cases}$$

usando la definizione di lunghezza di arco abbiamo che:

$$\int |\varphi'(\mathrm{t})|\,dt = \int \sqrt{1+|\mathrm{f}'(\mathrm{t})|^2}\,dt$$

Calcolo di lunghezza di curva

Con $\varphi(t)=x^{3/2}$ $x=\{2,7\}$

Con $\varphi(t)=x^{2}$ $x= \{0,8\}$

Con $\varphi(t)=\cos(x)$, con x $\{0, Pi\}$.