Calcolo Differenziale ed Integrazione, compito del 28-05-2002.

NOME COGNOME

Matricola n.

ESERCIZIO n. 1

i) Al variare del parametro ϵ, si risolva l'equazione differenziale:

$$\epsilon y'' + y' - y = \epsilon e^x, \quad \varepsilon \geqslant 0$$

ii) Detta $y_\epsilon(t)$ una famiglia di soluzioni dell'equazione sopra, è vero che $y_\epsilon(t)$ converge a $y_0(t)$ per ϵ che tende a 0?

---

i). $\varepsilon = 0$: $y' - y = 0 \Rightarrow y(x) = c e^x$

• $\varepsilon \gneq 0$: SOLUZIONI OMOGENEA : $\varepsilon \tilde{y}'' + \tilde{y}' - \tilde{y} = 0$, $\varepsilon\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ $\quad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon}$

$$\tilde{y}(x) = a\, e^{\frac{\sqrt{1+4\varepsilon}-1}{2\varepsilon}x} + b\, e^{-\frac{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}{2\varepsilon}x} = a\, e^{\frac{2}{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}x} + b\, e^{-\frac{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}{2\varepsilon}x}$$

SOLUZIONE PARTICOLARE : $y^* = \alpha e^x \Rightarrow \varepsilon\alpha + \alpha - \alpha = \varepsilon \Rightarrow \alpha = 1$

$$y(x) = a\, e^{\frac{2}{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}x} + b\, e^{-\frac{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}{2\varepsilon}x} + e^x$$

ii) La generica famiglia di soluzioni parametrizzata da ε è :

$$y_\varepsilon(x) = a_\varepsilon\, e^{\frac{2}{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}x} + b_\varepsilon\, e^{-\frac{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}{2\varepsilon}x} + e^x$$

se si considera $a_\varepsilon \equiv 0$, e $b_\varepsilon \equiv 1$, essendo $\varepsilon > 0$

si ha che tale $y_\varepsilon(x) = e^{-\frac{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}{2\varepsilon}x} + e^\varepsilon$

diverge per $x \lneq 0$, $\varepsilon \to 0^+$.

In particolare non converge ad alcuna delle soluzioni di $y' - y = 0$.

Calcolo Differenziale ed Integrazione, compito del 28-05-2002.

NOME COGNOME

Matricola n.

ESERCIZIO n. 2

Si trovino, al variare del parametro α, tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y'' = 3y' + x \\ x' = -(3-\alpha^2)y' - (\alpha^2-1)y \end{cases}$$

Derivando la prima equazione e sostituendo il valore di x' dato dalla seconda si ottiene

$$y''' = 3y'' - (3-\alpha^2)y' - (\alpha^2-1)y \,, \quad y''' - 3y'' + (3-\alpha^2)y' + (\alpha^2-1)y = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + (3-\alpha^2)\lambda + \alpha^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - \alpha^2\lambda + \alpha^2 - 1 = \lambda^3 + 3\lambda(1-\lambda) + \alpha^2(1-\lambda) - 1 =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1) - (3\lambda+\alpha^2)(\lambda-1) =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - \alpha^2)$$

$$\lambda_1 = 1 \,, \quad \lambda_2 = \frac{2-\sqrt{4-4+4\alpha^2}}{2} \,, \quad \lambda_3 = \frac{2+\sqrt{4-4+4\alpha^2}}{2}$$

$$\lambda_1 = 1 \,, \quad \lambda_2 = 1 - |\alpha| \,, \quad \lambda_3 = 1 + |\alpha|$$

Si ha

$$\alpha \neq 0 \qquad y = ae^t + be^{(1-|\alpha|)t} + ce^{(1+|\alpha|)t} = (a + be^{-|\alpha|t} + ce^{|\alpha|t})e^t$$

$$\alpha = 0 \qquad y = ae^t + bte^t + ct^2e^t = (a + bt + ct^2)e^t$$

Poiché dalla prima equazione si ha $x = y'' - 3y'$ ne segue.

$$\alpha \neq 0 \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^t + b\begin{pmatrix} 1 \\ (1-|\alpha|)^2 - 3(1-|\alpha|) \end{pmatrix}e^{(1-|\alpha|)t} + c\begin{pmatrix} 1 \\ (1+|\alpha|)^2 - 3(1+|\alpha|) \end{pmatrix}e^{(1+|\alpha|)t}$$

$$\alpha = 0 \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^t + b\begin{pmatrix} t \\ -1-2t \end{pmatrix}e^t + c\begin{pmatrix} t^2 \\ 2-2t-2t^2 \end{pmatrix}e^t$$

Calcolo Differenziale ed Integrazione, compito del 28-05-2002.

NOME COGNOME

Matricola n.

ESERCIZIO n. 3

Si risolva esplicitamente (eventualmente cambiando coordinate) il sistema di equazioni differenziali in $(x(t), y(t))$:

$$\begin{cases} x' = x(1-x^2-y^2) - y(x^2+y^2) \\ y' = y(1-x^2-y^2) + x(x^2+y^2) \end{cases}$$

A) Poichè $F(t,x,y) = (x(1-x^2-y^2) - y(x^2+y^2);\ y(1-x^2-y^2) + x(x^2+y^2)) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è C^1 è anche localmente lipschitziana nella variabile (x,y) uniformemente in t. Quindi per ogni dato iniziale (x_0,y_0) in $t=0$ vi è un intervallo I, $0\in\mathring{I}$, ed un'unica soluzione del sistema su I con tale dato: $(x(t), y(t))$.

B) Posto $q(t) = \rho^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$ si ha $q' = 2xx' + 2yy' = 2x^2(1-q) + 2y^2(1-q) = 2q(1-q)$

Quindi q risolve $\begin{cases} q' = 2q(1-q) \\ q \geq 0 \\ q(0) = x_0^2 + y_0^2 \end{cases}$ su I.

i. Se $x_0^2+y_0^2=0$ direttamente dal sistema per unicità si ha: $\boxed{I = \mathbb{R},\quad (x(t),y(t)) \equiv 0}$

ii. Se $x_0^2+y_0^2=1$ per unicità della soluzione del problema $q'=2q(1-q)$, $q(0)=1$ si ha $q(t)\equiv 1$ su I

quindi $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \\ x_0^2+y_0^2=1 \end{cases}$ per cui $\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - y_0 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix},\quad I = \mathbb{R}}$

iii. Se $q(0) \neq 0,1$ per unicità di $q'=2q(1-q)$, $q(\bar{t})=0$ o $q(\bar{t})=1$ si ha $\forall t\in I\ q(t)\neq 0,1$.

$\frac{q'}{q(1-q)} = 2$ integrando $\frac{q(t)}{|1-q(t)|} = e^c e^{2t} = \frac{q(0)}{|1-q(0)|} e^{2t}$; $c = \log \frac{q(0)}{|1-q(0)|}$

quindi $\frac{q(t)}{1-q(t)} = \frac{q(0)}{1-q(0)} e^{2t}$ per cui $\boxed{q(t) = \frac{\frac{q(0)}{1-q(0)}}{\frac{q(0)}{1-q(0)} + e^{-2t}} = \frac{(x_0^2+y_0^2)e^{2t}}{1+(x_0^2+y_0^2)(e^{2t}-1)},\ t\in I}$

e se $q(0) > 1$, dovendo essere $\frac{q(t)}{q(t)-1} > 1$ si ha $t > -\frac{c}{2}$ cioè $I \subseteq]-\frac{c}{2}; +\infty[$

- Se $q(0)\neq 0,1$, si ha quindi $(x(t),y(t))\neq 0$, per è ben definita:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \int_{(x_0,y_0)\,(x(t),y(t))} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \theta_0 + \int_0^t \frac{x(s)y'(s) - x'(s)y(s)}{x^2(s)+y^2(s)}\,ds \in C^1(I,\mathbb{R})$$

tale che $(x(t); y(t)) = (\rho(t)\cos\theta(t); \rho(t)\sin\theta(t))$, e $\vartheta_0 = \begin{cases} \arctan\frac{y_0}{x_0} & x_0>0,\ y_0\geq 0 \\ \pi/2 & x_0=0,\ y_0>0 \\ \pi + \arctan\frac{y_0}{x_0} & x_0<0 \\ \frac{3}{2}\pi & x_0=0,\ y_0<0 \\ 2\pi + \arctan\frac{y_0}{x_0} & x_0>0,\ y_0<0 \end{cases} \in [0; 2\pi[$

Dal sistema si ottiene:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \int_0^t \frac{x^2q + y^2q}{q}\,ds = \vartheta_0 + \int_0^t q\,ds = \vartheta_0 + \log\sqrt{1+(x_0^2+y_0^2)(e^{2t}-1)}$$

Concludendo.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & I = \mathbb{R} \quad \text{se } x_0^2 + y_0^2 = 0 \\ x_0 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - y_0 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t+\theta_0) \\ \sin(t+\theta_0) \end{pmatrix}, & I = \mathbb{R} \quad \text{se } x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ \sqrt{\dfrac{(x_0^2+y_0^2)e^{2t}}{1+(x_0^2+y_0^2)(e^{2t}-1)}} \begin{pmatrix} \cos\left(\log\sqrt{1+(x_0^2+y_0^2)(e^{2t}-1)} + \theta_0\right) \\ \sin\left(\log\sqrt{1+(x_0^2+y_0^2)(e^{2t}-1)} + \theta_0\right) \end{pmatrix}, & I = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } x_0^2+y_0^2 \leq 1 \\ \left]\log\sqrt{1-\dfrac{1}{x_0^2+y_0^2}}\, ; +\infty\right[& \text{se } x_0^2+y_0^2 \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

c) • Considerando $\theta_0 = \pi/2$

per $x = 0$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{1}{y^2} = 1 - \dfrac{1}{\rho^2}$ $\quad$; per $y = 0$ $\quad \dfrac{dx}{dy} = -1 + \dfrac{1}{x^2} = -1 + \dfrac{1}{\rho^2}$

$\lim\limits_{t \to +\infty} \rho = +\infty$

$\rho' > 0$