Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Insiemi numerabili

Definizione 1. *Diciamo che un insieme $\mathcal{I}$ è numerabile, se esiste una funzione* **surgettiva**

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{I}.$$

Proposizione 2.

(1) $\mathcal{N}$ è numerabile;

(2) ogni sottoinsieme di un insieme numerabile è numerabile;

(3) $\mathcal{Z}$ è numerabile;

(4) se $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ sono numerabili, allora il prodotto $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ è numerabile;

(5) $\mathbb{Q}$ è un insieme numerabile;

(6) $\mathbb{Q}^d$ è un insieme numerabile;

(7) Sia $\mathcal{I}$ l'insieme di tutte le palle $B_r(X)$ in $\mathbb{R}^d$ con centro $X \in \mathbb{Q}^d$ e raggio $r \in \mathbb{Q}$. Allora $\mathcal{I}$ è numerabile.

Il prossimo teorema è una propreità notevole dei numeri reali.

Teorema 3 (senza dimostrazione)**.** *L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è numerabile.*

Il lemma seguente sarà utile nella sezione dedicata agli insiemi compatti.

Lemma 4. *Sia Ω un sottoinsieme (qualsiasi) di $\mathbb{R}^d$ e sia $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ un ricoprimento di Ω con insiemi aperti $A_i \subset \mathbb{R}^d$, ovvero si ha*

$$\Omega \subset \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i\ .$$

Allora, esiste una successione di indici $\{i_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\{A_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento numerabile di Ω.

Dimostrazione. Useremo il lemma seguente:

> **Lemma 5.** *Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^d$.*
> *Allora, per ogni punto $X \in A$ esiste una palla $B_r(Y)$ tale che:*
>
> - *$Y \in \mathbb{Q}^d$ e $r \in \mathbb{Q}$;*
> - *$X \in B_r(Y)$;*
> - *$B_r(Y) \subset A$.*

Infatti, come conseguenza di questo lemma, possiamo trovare una famiglia (numerabile!) di palle $\{B_{r_k}(Y_k)\}_k$ tale che:

- $Y_k \in \mathbb{Q}^d$ e $r_k \in \mathbb{Q}$;
- $\{B_{r_k}(Y_k)\}_k$ è un ricoprimento di Ω;
- ogni palla $B_{r_k}(Y_k)$ è contenuta in un qualche insieme A_i ($i \in \mathcal{I}$) del ricoprimento di partenza (potrebbe anche essere contenuta in diversi insiemi contemporaneamente, in tal caso basta selezionare uno di essi). Se chiamiamo questo insieme A_{i_k}, otteniamo che $\{A_{i_k}\}_k$ è ancora un ricoprimento (stavolta numerabile) di Ω.

□