Continuità Lipschitz delle soluzioni di equazioni ellittiche in forma diveregenza

1. introduzione

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^1(\Omega)$ ed

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_d(x) \end{pmatrix}$$

un campo vettoriale in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Diciamo che una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema

$$-\operatorname{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \operatorname{div} F \quad \text{in} \quad \Omega\ ,$$

se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot A(x)\big[\nabla v\big]^t\,dx = \int_\Omega f(x)v\,dx - \int_\Omega F(x)\cdot\nabla v\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad v \in H^1_0(\Omega).$$

In seguito supporremo che la matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(x) & \dots & a_{dd}(x) \end{pmatrix}$$

sia una matrice a coefficienti variabili con le seguenti proprietà:

- i coefficienti di A sono funzioni Hölder continue:
$$a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \text{per ogni coppia di indici} \quad 1 \le i,j \le d.$$
- A è simmetrica:
$$a_{ij} \equiv a_{ji} : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{per} \qquad 1 \le i,j \le d,$$
- A è uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, ovvero esistono costanti $0 < c \le C$ tali che
$$c\,\mathrm{Id} \le A(x) \le C\,\mathrm{Id} \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega\ .$$

Dimostreremo il seguente teorema.

Teorema 1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\operatorname{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \operatorname{div} F \quad \textit{in} \quad \Omega\ ,$$

dove:

- *A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, con coefficienti Hölder.*
- *$f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.*
- *$F \in C^{0,\alpha}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, per un qualche $\alpha > 0$.*

Allora, $u \in C^{0,1}(\Omega)$.

---

2. Quasi-minimalità delle soluzioni

Lemma 2. *Siano $B_\rho(x_0) \in \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_\rho(x_0))$ una soluzione di*

$$-\operatorname{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \operatorname{div} F \quad \textit{in} \quad B_\rho(x_0).$$

Supponiamo che:

- *esistono costanti $C_A > 0$ e $\alpha > 0$ tali che*
$$\big(1 - C_A|x-x_0|^\alpha\big)\,\mathrm{Id} \le A_x \le \big(1 + C_A|x-x_0|^\alpha\big)\,\mathrm{Id} \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in B_\rho(x_0).$$
$$\boxed{\textit{In particolare, } A_{x_0} = \mathrm{Id}.}$$
- *$f \in L^p(B_\rho(x_0))$ per un qualche $p > d$.*
- *esistono costanti $C_F > 0$ e β tali che*
$$\sup_{B_R(x_0)} |F(x) - F(x_0)| \le C_F R^\beta \quad \textit{per ogni} \quad R \le \rho.$$

Allora,

$$\fint_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx \le 4C_A R^\alpha \fint_{B_R} |\nabla u|^2\,dx + 4\Big(C_d \|f\|_{L^p(B_\rho(x_0))} R^{1-d/p} + C_F R^\beta\Big),$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Proof. Supponiamo che $x_0 = 0$. Per ogni $B_R \subset B_\rho$, consideriamo la soluzione del problema

$$\Delta h = 0 \quad \text{in} \quad B_R, \qquad u - h \in H^1_0(B_R).$$

Allora, abbiamo

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2\,dx - \int_{B_R} |\nabla h|^2\,dx = \int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx.$$

Inoltre, per l'ottimalità di u,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\big(1 - C_A R^\alpha\big) \int_{B_R} |\nabla u|^2\,dx - \int_{B_R} fu\,dx - \int_{B_R} F\cdot\nabla u\,dx \\
&\le \frac{1}{2}\int_{B_R} \nabla u\, A_x (\nabla u)^t\,dx - \int_{B_R} fu - \int_{B_R} F\cdot\nabla u\,dx \\
&\le \frac{1}{2}\int_{B_R} \nabla h\, A_x (\nabla h)^t\,dx - \int_{B_R} fh - \int_{B_R} F\cdot\nabla h\,dx \\
&\le \frac{1}{2}\big(1 + C_A R^\alpha\big) \int_{B_R} |\nabla h|^2\,dx - \int_{B_R} fh - \int_{B_R} F\cdot\nabla h\,dx
\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx &= \frac{1}{2}\left(\int_{B_R} |\nabla u|^2\,dx - \int_{B_R} |\nabla h|^2\,dx\right) \\
&\le C_A R^\alpha \int_{B_R} |\nabla u|^2\,dx + \int_{B_R} f(u-h)\,dx + \int_{B_R} F\cdot\nabla(u-h)\,dx.
\end{aligned}$$

Ora, osserviamo che

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} f(u-h)\,dx &\le \left(\int_{B_R} f^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_{B_R} (u-h)^2\,dx\right)^{1/2} \\
&\le |B_R|^{1/2-1/p} \left(\int_{B_R} f^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_{B_R} (u-h)^2\,dx\right)^{1/2} \\
&\le |B_R|^{1/2-1/p} \|f\|_{L^p} C_d\, R \left(\int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

e di conseguenza,

$$\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} f(u-h)\,dx \le C_d \|f\|_{L^p} R^{1-d/p} \left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} F\cdot\nabla(u-h)\,dx &\le \left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |F(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx\right)^{1/2} \\
&\le C_F R^\beta \left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Quindi, abbiamo

$$\frac{1}{2}\fint_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx \le C_A R^\alpha \fint_{B_R} |\nabla u|^2\,dx + \Big(C_d\|f\|_{L^p} R^{1-d/p} + C_F R^\beta\Big)\left(\fint_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx\right)^{1/2},$$

che implica

$$\frac{1}{4}\fint_{B_R} |\nabla(u-h)|^2\,dx \le C_A R^\alpha \fint_{B_R} |\nabla u|^2\,dx + \Big(C_d\|f\|_{L^p} R^{1-d/p} + C_F R^\beta\Big)^2.$$

□

3. Dimostrazione del Teorema 1

Supponiamo che $x_0 \in \Omega$ e che $B_\rho(x_0) \subset \Omega$.

Mostreremo che, per $r \to 0$, la media

$$\fint_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx$$

può essere stimata con una costante che dipende dalla dimensione e anche da:

$$\fint_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx \ , \qquad \|f\|_{L^p(B_\rho(x_0))} \ , \qquad \|F\|_{C^{0,\beta}}(B_\rho(x_0)).$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Possiamo supporre che}\\ A(x_0) = \mathrm{Id} \qquad \text{e} \qquad x_0 = 0.\end{array}}$$

3.1. **La stima principale.** Siano

$$0 < r < R \leq \rho.$$

Cosnideriamo l'estensione armonica di u in B_R

$$\Delta h = 0 \quad \text{in} \quad B_R, \qquad u - h \in H^1_0(B_R).$$

Allora,

$$\begin{aligned}
\left(\fint_{B_r} |\nabla u|^2 \, dx\right)^{1/2} &\leq \left(\fint_{B_r} |\nabla h|^2 \, dx\right)^{1/2} + \left(\fint_{B_r} |\nabla (u-h)|^2 \, dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\fint_{B_R} |\nabla h|^2 \, dx\right)^{1/2} + \left(\frac{R^d}{r^d} \fint_{B_R} |\nabla (u-h)|^2 \, dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\fint_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx\right)^{1/2} + \left(\frac{R^d}{r^d} \fint_{B_R} |\nabla (u-h)|^2 \, dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\fint_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx\right)^{1/2} + \frac{R^{d/2}}{r^{d/2}} \left(4C_A R^\alpha \fint_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx + 4\Big(C_d \|f\|_{L^p} R^{1-d/p} + C_F R^\beta\Big)^2\right)^{1/2} \\
&\leq \left(1 + 2C_A^{1/2} R^{\alpha/2} \frac{R^{d/2}}{r^{d/2}}\right) \left(\fint_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx\right)^{1/2} + 2\frac{R^{d/2}}{r^{d/2}} \Big(C_d \|f\|_{L^p} R^{1-d/p} + C_F R^\beta\Big).
\end{aligned}$$

3.2. **Stima iterativa.** Ponendo

$$M_n = \left(\fint_{B_{2^{-n}}} |\nabla u|^2 \, dx\right)^{1/2},$$

nella stima precedente, otteniamo

$$M_{n+1} \leq \left(1 + \frac{2^{1+d/2} C_A^{1/2}}{2^{\alpha(n+1)/2}}\right) M_n + 2^{1+d/2} \left(\frac{C_d \|f\|_{L^p}}{2^{n(1-d/p)}} + \frac{C_F}{2^{n\beta}}\right).$$

Useremo il lemma seguente.Ora, poniamo:

- $X := \dfrac{1}{2^\kappa}$, dove $\kappa := \min\left\{\dfrac{\alpha}{2}\,;\ \beta\,;\ 1 - \dfrac{d}{p}\right\}$;
- $A := C_d C_A^{1/2}$;
- $B := C_d\Big(\|f\|_{L^p} + C_F\Big)$.

Di conseguenza, abbiamo

$$M_{n+1} \leq (1 + AX^n) M_n + BX^n.$$

Mostreremo che M_n rimane limitata per $n \to +\infty$. Osserviamo che nel lemma seguente possiamo prendere

$$m = \frac{1}{\kappa}\Big(2 + \log_2(C_d C_A^{1/2})\Big).$$

Lemma 3. *Sia $(M_n)_{n\geq n_0}$ una successione di numeri positivi tale che*

$$M_{n+1} \leq (1+AX^n)M_n + BX^n \quad \textit{per ogni} \quad n \geq n_0,$$

dove A e B sono costanti e $0 < X < 1$. Allora, esiste $m \geq n_0$ che dipende solo da A e da X tale che

$$M_n \leq \frac{M_m}{1-X} + \frac{B}{(1-X)^2} \quad \textit{per ogni} \quad n \geq m.$$

Proof. Sia

$$a_n := M_n + CX^n.$$

Allora,

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= M_{n+1} + CX^{n+1} \\
&\leq (1+AX^n)M_n + BX^n + CX^{n+1} \\
&\leq (1+AX^n)a_n + BX^n + CX^{n+1} - (1+AX^n)CX^n \\
&\leq (1+AX^n)a_n + X^n + \Big(B - (1-X)C\Big)X^n.
\end{aligned}$$

Scegliendo

$$C = \frac{B}{1-X},$$

abbiamo che

$$a_{n+1} \leq (1+AX^n)a_n \quad \text{per ogni} \quad n.$$

Supponiamo ora che per un qualche $n \geq m$

$$a_n \leq D \sum_{k=m}^{n} Y^k,$$

dove $D > 0$ e $Y \in (0,1)$ sono costanti (che sceglieremo in seguito). Allora

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\leq (1+AX^n)a_n \\
&\leq D(1+AX^n)\sum_{k=m}^{n} Y^k \\
&\leq D\sum_{k=m}^{n+1} Y^k - DY^{n+1} + DAX^n \sum_{k=m}^{n} Y^k \\
&\leq D\sum_{k=1}^{n+2} Y^k - DY^{n+1} + \frac{DAY^m}{1-Y}X^n.
\end{aligned}$$

Scegliendo,

$$X = Y$$

e m abbastanza grande tale che

$$\frac{AX^m}{1-X} \leq X,$$

otteniamo che

$$a_n \leq D\sum_{k=m}^{n} Xx^k \leq \frac{DX^m}{1-X} = \frac{a_m}{1-X} \quad \text{per ogni} \quad n \geq m,$$

dove abbiamo scelto D in modo di avere

$$DX^m = a_m.$$

□

3.3. Dimostrazione del Teorema 1 in $\Omega = B_1$.

Proposizione 4. *Siano $B_1(\bar{x}) \in \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_1(\bar{x}))$ una soluzione di*
$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \textit{in} \quad B_1(\bar{x}).$$
Supponiamo che:

- *esistono costanti $C_A > 0$ e $\alpha > 0$ tali che*
$$\big(1 - C_A|x-y|^\alpha\big)\, A_y \le A_x \le \big(1 + C_A|x-y|^\alpha\big)\, A_y \qquad \textit{per ogni} \qquad x, y \in B_1(\bar{x}).$$
- *esistono costanti $0 < \ell \le L$ tali che*
$$\ell\, \mathrm{Id} \le A_x \le L\, \mathrm{Id} \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in B_1(\bar{x}).$$
- *$f \in L^p(B_1(\bar{x}))$ per un qualche $p > d$.*
- *esistono costanti $C_F > 0$ e β tali che*
$$\sup_{x \in B_r(y)} |F(x) - F(y)| \le C_F r^\beta \quad \textit{per ogni} \quad r \le 1,$$
e per ogni $y \in B_1(\bar{x})$.

Allora, esiste una costante $C_{d,\ell,L} > 0$ che dipende solo da d, ℓ, L tale che
$$\left(\fint_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2\right)^{1/2} \le C_{\alpha,\beta,p,d}\, C_{d,\ell,L} \left(\left(1 + C_A^{d/4}\right)\left(\fint_{B_1(\bar{x})} |\nabla u|^2\right)^{1/2} + \|f\|_{L^p(B_1(\bar{x}))} + C_F\right),$$
$$\textit{per ogni } r \in (0, 1/2) \textit{ ed ogni } x_0 \in B_{1/2}(\bar{x}),$$
dove $C_{\alpha,\beta,p,d} > 0$ è una costante che dipende solo da α, β, p e d.

Proof. Senza perdita di generalità, supponiamo che
$$\bar{x} = 0.$$
Fissiamo un punto $x_0 \in B_{1/2}$. Sia M_{x_0} la matrice simmetrica a coefficienti costanti tale che

- $M_{x_0} A_{x_0} M_{x_0} = \mathrm{Id}$;
- $L^{-1/2}\, \mathrm{Id} \le M_{x_0} \le \ell^{-1/2}\, \mathrm{Id}$.

Definiamo:

- la matrice
$$\widetilde{A}(x) = M_{x_0} A(M_{x_0}^{-1} x) M_{x_0} \quad \text{per ogni} \quad x \in M_{x_0}(B_1).$$
- la funzione
$$g \in L^p(M_{x_0}(B_1))$$
definita dall'identità
$$f(x) = g(Bx) \quad \text{per ogni} \quad x \in B_1.$$
- il campo
$$G : M_{x_0}(B_1) \to \mathbb{R}^d$$
definito dall'identità
$$F(x) = M_{x_0}[G(M_{x_0} x)] \quad \text{per ogni} \quad x \in B_1.$$
- la funzione $v(x) := u(M_{x_0}^{-1} x)$ soluzione di
$$-\mathrm{div}(\widetilde{A}\, \nabla v) = g + \mathrm{div}\, G \quad \text{in} \quad M_{x_0}(B_1).$$

Poniamo $y_0 = M_{x_0}(x_0)$. Osserviamo che esiste un raggio
$$\tau \in (0,1)$$
che dipende solo da d, ℓ, L tale che:
$$B_\tau(y_0) \subset M_{x_0}(B_1).$$
In particolare, v risolve l'equazione
$$-\mathrm{div}(\widetilde{A}\, \nabla v) = g + \mathrm{div}\, G \quad \text{in} \quad B_\tau(y_0),$$
ed esiste una costante $C_{d,\ell,L}$ tale che
$$\fint_{B_\tau(y_0)} |\nabla v|^2 \le C_{d,\ell,L} \fint_{B_1} |\nabla u|^2\, dx.$$

e
$$\fint_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\,dx \le C_{d,\ell,L} \fint_{B_{R/\tau}(y_0)} |\nabla v|^2,$$
per ogni $x_0 \in B_{1/2}$ ed ogni R abbastanza piccolo.

Per quanto riguarda, il campo G e la funzione g, osserviamo che:

- $g \in L^p(B_\tau(y_0))$ e
$$\|g\|_{L^p(B_\tau(y_0))} \le C_{d,\ell,L}\|f\|_{L^p(B_\rho)};$$
- esiste una costante $C_G := C_{d,\ell,L}C_F$ tale che
$$\sup_{x\in B_R(y_0)} |G(x)-G(y_0)| \le C_G R^\beta \quad \text{per ogni} \quad R \le \tau.$$

In particolare, le esponenti
$$p > d \qquad \text{e} \qquad \beta > 0$$
rimangono le stesse. Lo stesso vale per $\alpha > 0$.

Di conseguenza, è sufficiente mostrare la stima per
$$\fint_{B_r(y_0)} |\nabla v|^2.$$

Ora, definiamo:

- $X := \dfrac{1}{2^\kappa}$, dove $\kappa := \min\left\{\dfrac{\alpha}{2}\,;\ \beta\,;\ 1-\dfrac{d}{p}\right\}$; Osserviamo che:
  - (X1) se la matrice A è costante, possiamo scegliere $C_A = 0$ e $\alpha = 2$;
  - (X2) se $F = 0$, allora $C_F = 0$ e $\beta = 1$;
  - (X3) se $f = 0$ oppure $f \in L^\infty$, allora $1 - \frac{d}{p} = 1$.

- la costante A del Lemma 3 come $C_{d,\ell,L}C_A^{1/2}$;
- la costante B del Lemma 3 come $C_{d,\ell,L}\Big(\|f\|_{L^p} + C_F\Big)$;
- $n_0 \ge 1$ tale che
$$X^{n_0} \le \tau < X^{n_0-1}.$$
- m come la più piccola costante $m \ge n_0$ tale che
$$\frac{C_{d,\ell,L}C_A^{1/2}X^m}{1-X} \le X.$$
Osserviamo che se $C_A = 0$ (ovvero se la matrice A ha coefficienti costanti), allora possiamo scegliere $m = n_0$. Scegliamo $m = n_0$ anche quando abbiamo
$$\frac{C_{d,\ell,L}C_A^{1/2}X^{n_0}}{1-X} \le X.$$
Quando invece si ha la disuguaglianza opposta
$$\frac{C_{d,\ell,L}C_A^{1/2}X^{n_0}}{1-X} \ge X,$$
allora scegliamo m tale che
$$X^2 \le \frac{C_{d,\ell,L}C_A^{1/2}X^m}{1-X} \le X.$$

Per il Lemma 3, abbiamo che per ogni $n \ge m$
$$\begin{aligned}\left(\fint_{B_{X^n}(y_0)} |\nabla v|^2\right)^{1/2} &\le \frac{1}{1-X}\left(\fint_{B_{X^m}(y_0)} |\nabla v|^2\right)^{1/2} + \frac{C_{d,\ell,L}}{(1-X)^2}\Big(\|f\|_{L^p} + C_F\Big)\\ &\le \frac{1}{1-X}\frac{1}{X^{dm}}\left(\int_{B_\tau(y_0)} |\nabla v|^2\right)^{1/2} + \frac{C_{d,\ell,L}}{(1-X)^2}\Big(\|f\|_{L^p} + C_F\Big).\end{aligned}$$

Ora, consideriamo due casi:

Caso 1. $\frac{C_{d,\ell,L}C_A^{1/2}X^{n_0}}{1-X} \leq X$. Allora, $m = n_0$ e per ogni $n \geq n_0$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\left(\fint_{B_{X^n}(y_0)} |\nabla v|^2\right)^{1/2} &\leq \frac{1}{1-X}\left(\frac{1}{X^{dn_0}}\int_{B_\tau(y_0)} |\nabla v|^2\right)^{1/2} + \frac{C_{d,\ell,L}}{(1-X)^2}\Big(\|f\|_{L^p} + C_F\Big) \\
&\leq \frac{1}{1-X}\left(\frac{1}{X^dX^{d(n_0-1)}}\int_{B_\tau(y_0)} |\nabla v|^2\right)^{1/2} + \frac{C_{d,\ell,L}}{(1-X)^2}\Big(\|f\|_{L^p} + C_F\Big) \\
&\leq \frac{1}{X^{d/2}(1-X)}\left(\fint_{B_\tau(y_0)} |\nabla v|^2\right)^{1/2} + \frac{C_{d,\ell,L}}{(1-X)^2}\Big(\|f\|_{L^p} + C_F\Big) \\
&\leq \frac{C_{d,\ell,L}}{X^{d/2}(1-X)}\left(\fint_{B_1} |\nabla u|^2\right)^{1/2} + \frac{C_{d,\ell,L}}{(1-X)^2}\Big(\|f\|_{L^p} + C_F\Big).
\end{aligned}$$

Caso 2. $\frac{C_{d,\ell,L}C_A^{1/2}X^{n_0}}{1-X} \geq X$. Allora, scegliamo m tale che

$$X^2 \leq \frac{C_{d,\ell,L}C_A^{1/2}X^m}{1-X} \leq X.$$

In quasto caso abbiamo, per ogni $n \geq m$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\left(\fint_{B_{X^n}(y_0)} |\nabla v|^2\right)^{1/2} &\leq \frac{1}{1-X}\left(\frac{1}{X^{dm}}\int_{B_\tau(y_0)} |\nabla v|^2\right)^{1/2} + \frac{C_{d,\ell,L}}{(1-X)^2}\Big(\|f\|_{L^p} + C_F\Big) \\
&\leq \frac{C_{d,\ell,L}C_A^{d/4}}{(1-X)^{1+d/2}}\frac{1}{X^d}\left(\int_{B_\tau(y_0)} |\nabla v|^2\right)^{1/2} + \frac{C_{d,\ell,L}}{(1-X)^2}\Big(\|f\|_{L^p} + C_F\Big) \\
&\leq \frac{C_{d,\ell,L}C_A^{d/4}}{(1-X)^{1+d/2}}\frac{1}{X^d}\left(\fint_{B_1} |\nabla u|^2\right)^{1/2} + \frac{C_{d,\ell,L}}{(1-X)^2}\Big(\|f\|_{L^p} + C_F\Big).
\end{aligned}$$

Se invece $n_0 \leq n \leq m$, allora

$$\begin{aligned}
\fint_{B_{X^n}(y_0)} |\nabla v|^2 \leq \frac{1}{X^{dn}}\int_{B_\tau(y_0)} |\nabla v|^2 &\leq \frac{1}{X^{dm}}\int_{B_\tau(y_0)} |\nabla v|^2 \\
&\leq \frac{C_{d,\ell,L}C_A^{d/2}}{(1-X)^d}\frac{1}{X^{2d}}\int_{B_\tau(y_0)} |\nabla v|^2 \\
&\leq \frac{C_{d,\ell,L}C_A^{d/2}}{(1-X)^d}\frac{1}{X^{2d}}\fint_{B_1} |\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

Di conseguenza, per ogni $n \geq n_0$ si ha

$$\left(\fint_{B_{X^n}(y_0)} |\nabla v|^2\right)^{1/2} \leq \frac{C_{d,\ell,L}C_A^{d/4}}{(1-X)^{1+d/2}}\frac{1}{X^d}\left(\fint_{B_1} |\nabla u|^2\right)^{1/2} + \frac{C_{d,\ell,L}}{(1-X)^2}\Big(\|f\|_{L^p} + C_F\Big).$$

Mettendo insieme le stime di Caso 1 e Caso 2, otteniamo

$$\left(\fint_{B_{X^n}(y_0)} |\nabla v|^2\right)^{1/2} \leq \frac{C_{d,\ell,L}}{X^{d/2}(1-X)}\left(1 + \frac{C_A^{d/4}}{(1-X)^{d/2}X^{d/2}}\right)\left(\fint_{B_1} |\nabla u|^2\right)^{1/2} + \frac{C_{d,\ell,L}}{(1-X)^2}\Big(\|f\|_{L^p} + C_F\Big),$$

per ogni $n \geq n_0$.

Ora, siccome per ogni $r < \tau$ esiste $n \geq n_0$ tale che $X^n \leq r < X^{n-1}$, otteniamo

$$\left(\fint_{B_r(y_0)} |\nabla v|^2\right)^{1/2} \leq \frac{C_{d,\ell,L}}{X^d(1-X)}\left(1 + \frac{C_A^{d/4}}{(1-X)^{d/2}X^{d/2}}\right)\left(\fint_{B_1} |\nabla u|^2\right)^{1/2} + \frac{C_{d,\ell,L}}{X^d(1-X)^2}\Big(\|f\|_{L^p} + C_F\Big),$$

per ogni $r < \tau$. □

3.4. **Dimostrazione del Teorema 1 in $\Omega = B_R$.**

Proposizione 5. *Siano $B_R \in \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R)$ una soluzione di*
$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \textit{in} \quad B_R.$$
Supponiamo che:

- *esistono costanti $C_A > 0$ e $\alpha > 0$ tali che*
$$\big(1 - C_A|x-y|^\alpha\big)\, A_y \le A_x \le \big(1 + C_A|x-y|^\alpha\big)\, A_y \qquad \textit{per ogni} \qquad x, y \in B_R.$$
- *esistono costanti $0 < \ell \le L$ tali che*
$$\ell\, \mathrm{Id} \le A_x \le L\, \mathrm{Id} \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in B_R.$$
- *$f \in L^p(B_R)$ per un qualche $p > d$.*
- *esistono costanti $C_F > 0$ e β tali che*
$$\sup_{x \in B_r(y)} |F(x) - F(y)| \le C_F r^\beta \quad \textit{per ogni} \quad r \le R,$$
e per ogni $y \in B_R$.

Allora, esiste una costante $C_{d,\ell,L} > 0$ che dipende solo da d, ℓ, L tale che
$$\left(\fint_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2\right)^{1/2} \le C_{d,\ell,L} C_{\alpha,\beta,p,d} \left(\left(1 + (C_A R^\alpha)^{d/4}\right)\left(\fint_{B_R} |\nabla u|^2\right)^{1/2} + R^{1-d/p}\|f\|_{L^p(B_R)} + C_F R^\beta\right),$$
$$\textit{per ogni } r \in (0, R/2) \textit{ ed ogni } x_0 \in B_{R/2},$$
dove $C_{\alpha,\beta,p,d}$ è una costante che dipende solo da α, β e p e d.

Proof. Sia $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$. Definiamo le funzioni
$$u_R : B_1 \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \varphi_R : B_1 \to \mathbb{R}$$
come
$$u_R(x) = u(Rx) \qquad \text{e} \qquad \varphi_R(x) = \varphi(Rx).$$
Di conseguenza,
$$u(x) = u_R\big(x/R\big) \quad \text{e} \quad \nabla u(x) = \frac{1}{R}\nabla u_R\big(x/R\big)\ ; \qquad \varphi(x) = \varphi_R\big(x/R\big) \quad \text{e} \quad \nabla\varphi(x) = \frac{1}{R}\nabla\varphi_R\big(x/R\big).$$

L'equazione per u_R. Per trovare quale equazione risolve u_R calcoliamo
$$\begin{aligned}\int_{B_R} \nabla\varphi(x) A(x) \nabla u(x)^t\, dx &= \frac{1}{R^2}\int_{B_R} \nabla\varphi_R\big(x/R\big) A(x) (\nabla u_R)^t\big(x/R\big)\, dx \\ &= \frac{R^d}{R^2}\int_{B_1} \nabla\varphi_R(y) A(Ry)(\nabla u_R)^t(y)\, dy.\end{aligned}$$
$$\int_{B_R} \varphi(x) f(x)\, dx = \int_{B_R} \varphi_R\big(x/R\big) f(x)\, dx = R^d \int_{B_1} \varphi_R(y) f(Ry)\, dy.$$
$$\int_{B_R} \nabla\varphi(x) F(x)\, dx = \frac{1}{R}\int_{B_R} \nabla\varphi_R\big(x/R\big) F(x)\, dx = \frac{R^d}{R}\int_{B_1} \nabla\varphi_R(y) F(Ry)\, dy.$$
Di conseguenza,
$$\frac{R^d}{R^2}\int_{B_1} \nabla\varphi_R(y) A(Ry)(\nabla u_R)^t(y)\, dy = R^d \int_{B_1} \varphi_R(y) f(Ry)\, dy - \frac{R^d}{R}\int_{B_1} \nabla\varphi_R(y) F(Ry)\, dy,$$
e quindi la funzione u_R è soluzione di
$$-\mathrm{div}\big(A_R \nabla u_R\big) = f_R + \mathrm{div} F_R \quad \text{in} \quad B_1,$$
dove
$$A_R(x) := A(Rx)\ , \quad f_R(x) = R^2 f(Rx) \quad \text{e} \quad F_R(x) = R\, F(Rx).$$

Le costanti relativi ad A_R, F_R e f_R.

- le costanti C_{A_R} e α_R relativi alla matrice a coefficienti variabili A_R in B_1 sono dati da
$$C_{A_R} = C_A R^\alpha \qquad \text{e} \qquad \alpha_R = \alpha,$$
ovvero:
$$\big(1 - C_A R^\alpha |x-y|^\alpha\big)\, A_R(y) \le A_R(x) \le \big(1 + C_A R^\alpha |x-y|^\alpha\big)\, A_R(y) \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in B_1.$$
- la costante di ellitticità ℓ e della limitatezza L della matrice rimangono le stesse:
$$\ell\, \mathrm{Id} \le A_R(x) \le L\, \mathrm{Id} \qquad \text{per ogni} \qquad x \in B_1.$$
- $f_R \in L^p(B_1)$ e
$$\int_{B_1} |f_R|^p(x)\, dx = \int_{B_1} R^{2p} |f|^p\big(x/R\big)\, dx = R^{2p-d} \int_{B_R} |f(y)|^p\, dy.$$
Di conseguenza,
$$\|f_R\|_{L^p(B_1)} = R^{2-d/p} \|f\|_{L^p(B_R)}.$$
- le costanti C_{F_R} e β_R relativi al campo vettoriale $F_R : B_1 \to \mathbb{R}$ sono date da
$$C_{F_R} = R^{1+\beta} C_F \qquad \text{e} \qquad \beta_R = \beta\,.$$
Infatti, per ogni $r \le 1$
$$\begin{aligned}\sup_{x \in B_r(y)} |F_R(x) - F_R(y)| &= R \sup_{x \in B_r(y)} |F(Rx) - F(Ry)| \\ &= R \sup_{Rx \in B_{rR}(Ry)} |F(Rx) - F(Ry)| \le R C_F (rR)^\beta = R^{1+\beta} C_F\, r^\beta\,,\end{aligned}$$
per ogni $y \in B_1$.

La media di $|\nabla u_R|$. Per ogni $r \le R$, calcoliamo la media
$$\fint_{B_r} |\nabla u(x)|^2\, dx = \frac{1}{R^2} \fint_{B_r} |\nabla u_R|^2\big(x/R\big)\, dx = \frac{1}{R^2} \fint_{B_{rR}} |\nabla u_R|^2(y)\, dy.$$

Conclusione.
$$\begin{aligned}\left(\fint_{B_r} |\nabla u|^2\right)^{1/2} &= \frac{1}{R} \left(\fint_{B_{rR}} |\nabla u_R|^2\right)^{1/2} \\ &\le C_{\alpha,\beta,p,d}\, C_{d,\ell,L} \frac{1}{R} \left(\Big(1 + (C_A R^\alpha)^{d/4}\Big) \left(\fint_{B_1} |\nabla u_R|^2\right)^{1/2} + R^{2-d/p} \|f\|_{L^p(B_R)} + C_F R^{1+\beta}\right) \\ &= C_{\alpha,\beta,p,d}\, C_{d,\ell,L} \left(\Big(1 + (C_A R^\alpha)^{d/4}\Big) \left(\fint_{B_R} |\nabla u|^2\right)^{1/2} + R^{1-d/p} \|f\|_{L^p(B_R)} + C_F R^\beta\right).\end{aligned}$$
$\square$

3.5. **Stima del gradiente.** Un corollario utile della proposizione precedente è il seguente.

Proposizione 6. *Siano $B_R \in \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R)$ una soluzione di*
$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad B_R,$$
dove $f \in L^p(B_R)$ per un qualche $p > d$. Allora, esiste una costante dimensionale $C_d > 0$ tale che
$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{R/2})} \le C_d \left(\frac{1}{R} \|u\|_{L^\infty(B_R)} + R^{1-d/p} \|f\|_{L^p(B_R)}\right).$$

Proof. Da Proposizione 6 sappiamo che esiste una costante dimensionale $C_d > 0$ tale che
$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{R/2})} \le C_d \left(\left(\fint_{B_{3R/2}} |\nabla u|^2\right)^{1/2} + R^{1-d/p} \|f\|_{L^p(B_R)}\right).$$
Per la disuguaglianza di Caccioppoli, invece
$$\fint_{B_{3R/2}} |\nabla u|^2 \le C_d \frac{1}{R^2} \fint_{B_R} u^2 \le C_d \frac{1}{R^2} \|u\|^2_{L^\infty(B_R)}.$$
$\square$

4. Continuità Lipschitz fino al bordo

Teorema 7. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ con bordo $C^{1,\alpha}$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \text{in} \quad \Omega \cap B_\rho \\ u = g \quad \text{su} \quad \partial\Omega \cap B_\rho, \end{cases}$$

dove:

- *A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, con coefficienti Hölder.*
- *$f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.*
- *$F \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\alpha > 0$.*
- *$g \in C^{1,\alpha}(B_\rho)$.*

Allora, $u \in C^{0,1}(B_{\rho/2} \cap \overline{\Omega})$.

Ragionando come nella dimostrazione della Proposizione 4, otteniamo

Proposizione 8. *Siano H un iperpiano in $\mathbb{R}^d$ con vettore normale $\nu \in \mathbb{R}^d$. Definiamo*

$$H^+ := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ x \cdot \nu > 0\}.$$

Siano $\bar{x} \in H$, $B_R(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R(\bar{x}))$ una soluzione di

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \text{in} \quad B_R(\bar{x}) \cap H^+, \\ \quad u = 0 \quad \text{su} \quad B_R(x') \setminus H^+ \ . \end{cases}$$

Supponiamo che:

- *esistono costanti $C_A > 0$ e $\alpha > 0$ tali che*
$$\big(1 - C_A|x-y|^\alpha\big)\, A_y \le A_x \le \big(1 + C_A|x-y|^\alpha\big)\, A_y \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in B_R(\bar{x}).$$
- *esistono costanti $0 < \ell \le L$ tali che*
$$\ell\, \mathrm{Id} \le A_x \le L\, \mathrm{Id} \qquad \text{per ogni} \qquad x \in B_\rho(\bar{x}).$$
- *$f \in L^p(B_R(\bar{x}))$ per un qualche $p > d$.*
- *esistono costanti $C_F > 0$ e β tali che*
$$\sup_{x \in B_r(y)} |F(x) - F(y)| \le C_F r^\beta \quad \text{per ogni} \quad r \le R,$$
e per ogni $y \in B_R(\bar{x})$.

Allora, esiste una costante $C_{d,\ell,L} > 0$ che dipende solo da d, ℓ, L tale che

$$\left(\fint_{B_r(x_0)\cap H^+} |\nabla u|^2\right)^{1/2} \le C_{d,\ell,L} C_{\alpha,\beta,p,d} \left(\left(1 + (C_A R^\alpha)^{d/4}\right) \left(\fint_{B_R(\bar{x})\cap H^+} |\nabla u|^2\right)^{1/2} + R^{1-d/p}\|f\|_{L^p(B_R)} + C_F R^\beta \right),$$

per ogni $r \in (0, R/2)$ ed ogni $x_0 \in B_{R/2}(\bar{x})$,

dove $C_{\alpha,\beta,p,d}$ è una costante che dipende solo da α, β e p e d.

4.1. Dimostrazione del Teorema 7.

Supponiamo che

$$\Omega = H^+ \qquad \text{e} \qquad g = 0.$$

Sia $x_0 \in B_{\rho/4} \cap H^+$. Sia $y_0 \in B_{\rho/4} \cap H^+$ la proiezione di x_0 su H e sia $r_0 = |x_0 - y_0|$.

Per Proposizione 8, prendendo

$$R_0 = 2r_0\,,$$

abbiamo

$$\left(\fint_{B_{R_0}(y_0)\cap H^+} |\nabla u|^2\right)^{1/2} \le C \left(\left(1 + (C_A \rho^\alpha)^{d/4}\right) \left(\fint_{B_\rho\cap H^+} |\nabla u|^2\right)^{1/2} + \rho^{1-d/p}\|f\|_{L^p(B_\rho)} + C_F \rho^\beta \right),$$

dove $C = C_{d,\ell,L} C_{\alpha,\beta,p,d}$. Ora, sicccome

$$B_{r_0}(x_0) \subset B_{R_0}(y_0) \cap H^+$$

esiste una costante dimensionale $C_d > 0$ tale che

$$\fint_{B_{r_0}(x_0)} |\nabla u|^2 \le C_d \fint_{B_{R_0}(y_0)\cap H^+} |\nabla u|^2.$$

Di conseguenza,

$$\left(\fint_{B_{r_0}(x_0)} |\nabla u|^2\right)^{1/2} \le C\left(\left(1+(C_A\rho^\alpha)^{d/4}\right)\left(\fint_{B_\rho\cap H^+} |\nabla u|^2\right)^{1/2} + \rho^{1-d/p}\|f\|_{L^p(B_\rho)} + C_F\rho^\beta\right).$$

D'altra parte, usando Proposizione 4, abbiamo

$$|\nabla u(x_0)| \le C\left(\left(1+(C_A r_0^\alpha)^{d/4}\right)\left(\fint_{B_{r_0}(x_0)} |\nabla u|^2\right)^{1/2} + r_0^{1-d/p}\|f\|_{L^p(B_\rho)} + C_F r_0^\beta\right).$$

Mettendo le due stime insieme, otteniamo che $|\nabla u|$ è limitato in $B_{\rho/4}$. $\square$
