Limiti in coordinate polari

Definizione di $M(r)$ e $m(r)$

Data una funzione

$$F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \; ,$$

per ogni raggio $r > 0$ definiamo

$$M(r) := \sup_{\partial B_r} F \qquad \text{e} \qquad m(r) := \inf_{\partial B_r} F \; .$$

Osservazione 1. *Ovviamente, per costruzione si ha che*

$$m(r) \le M(r) \qquad \textit{per ogni} \quad r > 0.$$

Inoltre, fissato un raggio $r > 0$, abbiamo

$$m(r) \le F(X) \le M(r) \qquad \textit{per ogni} \quad X \in \partial B_r \, .$$

Osservazione 2. *In dimensione $d = 2$, abbiamo che*

$$\partial B_r = \Big\{ \big(r\cos\theta \, , \, r\sin\theta \big) \; : \; \theta \in [0, 2\pi] \Big\}.$$

Di conseguenza, possiamo riscrivere la definizione delle funzioni

$$M : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad e \qquad m : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

come segue:

$$M(r) = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \qquad e \qquad m(r) = \inf_{\theta\in[0,2\pi]} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

Esistenza e calcolo del limite di una funzione: il teorema principale

Teorema 3. *Data una funzione $F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definiamo le funzioni*

$$M : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad e \qquad m : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

come sopra. Dato

$$\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\},$$

sono equivalenti:

(1) $\lim_{X\to 0} F(X) = \ell$ *;*

(2) $\lim_{r\to 0} M(r) = \ell \quad$ *e* $\quad \lim_{r\to 0} m(r) = \ell$ *.*

Osservazione 4. *Ricordiamo che, per definizione,*

$$\lim_{X\to 0} F(X) = \ell \; ,$$

se e soltanto se

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell \quad \textit{per ogni successione convergente} \quad X_n \to 0.$$

Dimostrazione del Teorema 3 nel caso $\ell \in \mathbb{R}$.

Cominciamo col dimostrare il Teorema 3 nel caso $\ell \in \mathbb{R}$.

Dimostriamo prima che (2) $\Rightarrow$ (1). Sia $X_n \in \mathbb{R}^d$ una successione tale che

$$\lim_{n\to\infty} X_n = 0.$$

Definiamo la successione

$$r_n := |X_n|$$

ed osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

Di conseguenza

$$\lim_{n\to\infty} M(r_n) = \lim_{r\to 0} M(r) = \ell \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} m(r_n) = \lim_{r\to 0} m(r) = \ell\ .$$

Siccome

$$m(r_n) = \inf_{X\in\partial B_{r_n}} F(X) \le F(X_n) \le \sup_{X\in\partial B_{r_n}} F(X) = M(r_n),$$

passando al limite per $n \to \infty$, otteniamo

$$\ell = \lim_{n\to\infty} m(r_n) \le \lim_{n\to\infty} F(X_n) \le \lim_{n\to\infty} M(r_n) = \ell,$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell.$$

Dimostriamo ora che (1) $\Rightarrow$ (2). Supponiamo per assurdo che il limite $\lim\limits_{r\to 0} M(r)$ non sia uguale ad ℓ. Per la definizione di limite[1], esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ possiamo trovare un raggio

$$r_\delta \in (0, \delta)$$

tale per cui

$$|M(r_\delta) - \ell| \ge \varepsilon.$$

Fissiamo la costante ε trovata ed osserviamo che (prendendo $\delta = 1/n$) per ogni $n \ge 1$, possiamo trovare un raggio r_n tale che

$$0 < r_n < \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad |M(r_n) - \ell| \ge \varepsilon\,.$$

Per la definizione di M abbiamo

$$M(r_n) := \sup\Big\{F(X)\ :\ X \in \partial B_{r_n}\Big\}.$$

Per la definizione di estremo superiore, esiste $X_n \in \partial B_{r_n}$ tale per cui

$$M(r_n) - \frac{\varepsilon}{2} \le F(X_n) \le M(r_n).$$

Quindi,

$$0 < r_n = |X_n| < \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad |F(X_n) - \ell| \ge \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

D'altra parte, siccome per ipotesi $\lim_{X\to 0} F(X) = \ell$, abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell,$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} |F(X_n) - \ell| = 0.$$

Assurdo. $\square$

[1] Diciamo che $\lim\limits_{r\to 0^+} M(r) = \ell$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$0 < r < \delta \quad \Rightarrow \quad |M(r) - \ell| < \varepsilon.$$

Dimostrazione del Teorema 3 nel caso $\ell = +\infty$.

Nel caso $\ell = +\infty$, possiamo riscrivere il teorema nel modo seguente.

Proposizione 5. *Sia $F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali. Allora, sono equivalenti:*

(i) $\lim\limits_{X \to 0} F(X) = +\infty$;

(ii) $\lim\limits_{\rho \to 0^+} m(\rho) = +\infty$.

Dimostrazione. Supponiamo che (i) *non sia vero.* Allora, possiamo trovare una costante $C > 0$ ed una successione $X_n \to 0$ tali che

$$F(X_n) < C \qquad \text{per ogni} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Poniamo $\rho_n := |X_n|$. Allora, abbiamo che

$$\rho_n \to 0 \qquad \text{e} \qquad \inf_{\partial B_{\rho_n}} F \le F(X_n) < C,$$

e quindi (ii) non vale.

Supponiamo ora che (ii) *non sia vero.* Allora, esistono $C > 0$ ed una successione $\rho_n \to 0$ tali che

$$\inf_{\partial B_{\rho_n}} F < C \qquad \text{per ogni} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenza, su ogni sfera ∂B_{ρ_n} esiste un punto X_n tale che

$$F(X_n) < C\,.$$

Siccome $|X_n| = \rho_n \to 0$, abbiamo che (i) non vale. $\square$

Proposizione 6. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali. Allora, sono equivalenti:*

(i) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} F(x,y) = +\infty$;

(ii) $\lim\limits_{\rho \to 0^+} \Big\{ \inf\limits_{\theta \in [0,2\pi]} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \Big\} = +\infty$.

Dimostrazione del Teorema 3 nel caso $\ell = -\infty$.

Proposizione 7. *Sia $F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali. Allora, sono equivalenti:*

(i) $\lim\limits_{X \to 0} F(X) = -\infty$;

(ii) $\lim\limits_{\rho \to 0^+} M(\rho) = -\infty$.

Dimostrazione. Supponiamo che (i) *non sia vero.* Allora, possiamo trovare una costante $C > 0$ ed una successione $X_n \to 0$ tali che

$$F(X_n) > -C \qquad \text{per ogni} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Poniamo $\rho_n := |X_n|$. Allora, abbiamo che

$$\rho_n \to 0 \qquad \text{e} \qquad \sup_{\partial B_{\rho_n}} F \le F(X_n) > -C,$$

e quindi (ii) non vale.

Supponiamo ora che (ii) *non sia vero.* Allora, esistono $C > 0$ ed una successione $\rho_n \to 0$ tali che

$$\sup_{\partial B_{\rho_n}} F > -C \qquad \text{per ogni} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenza, su ogni sfera ∂B_{ρ_n} esiste un punto X_n tale che

$$F(X_n) > -C\,.$$

Siccome $|X_n| = \rho_n \to 0$, abbiamo che (i) non vale. □

Proposizione 8. *Sia* $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *una funzione a valori reali. Allora, sono equivalenti:*

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = -\infty$;

(ii) $\displaystyle\lim_{\rho\to 0^+} \Big\{ \sup_{\theta\in[0,2\pi]} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\Big\} = -\infty.$

Esempi

Esempio 9. *Dire se esiste (e se esiste, calcolarlo) il limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) \qquad \textit{dove} \qquad F(x,y) := \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\Big(1 + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big)}.$$

Soluzione. Scriviamo la funzione F in coordinate polari:

$$F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho\sin\theta}{\rho(1+\rho^{-2}\sin^2\theta)} = \frac{\sin\theta}{1+\rho^{-2}\sin^2\theta}.$$

Fissiamo un raggio $\rho > 0$ e studiamo la funzione

$$f_\rho : [0,2\pi] \to \mathbb{R}\,, \qquad f_\rho(\theta) := \frac{\sin\theta}{1+\rho^{-2}\sin^2\theta}.$$

Per trovare il massimo di f_ρ su $[0,2\pi]$, calcoliamo la derivata

$$f_\rho'(\theta) = \frac{\cos\theta\,(1-\rho^{-2}\sin^2\theta)}{(1+\rho^{-2}\sin^2\theta)^2}.$$

Supponiamo che il massimo di f_ρ sia raggiunto in un punto

$$\theta_M \in [0,2\pi].$$

Allora, θ_M è uno degli estremi dell'intervallo $[0,2\pi]$ oppure $f_\rho'(\theta_M) = 0$.
Quindi, abbiamo le seguenti possibilita per θ_M :

(1) $\theta_M = 0$ oppure $\theta_M = 2\pi$;

(2) $\cos(\theta_M) = 0$;

(3) $\sin(\theta_M) = \pm\rho$.

Nel caso (1), abbiamo semplicemente che

$$F(\rho\cos\theta_M, \rho\sin\theta_M) = f_\rho(\theta_M) = 0.$$

Nel caso (2), osserviamo che necessariamenre $\sin(\theta_M) = \pm 1$ e quindi

$$f_\rho(\theta_M) = \pm\frac{1}{1+\rho^{-2}} = \pm\frac{\rho^2}{1+\rho^2}.$$

Nel caso (3), abbiamo che

$$f_\rho(\theta_M) = \pm\frac{\rho}{2}.$$

Quindi,

$$M(\rho) = \max_{\theta\in[0,2\pi]} f_\rho = \max\left\{0, \pm\frac{\rho^2}{1+\rho^2}, \pm\frac{\rho}{2}\right\} = \max\left\{0, \frac{\rho^2}{1+\rho^2}, \frac{\rho}{2}\right\} = \frac{\rho}{2}.$$

Analogamente,

$$m(\rho) = \min_{\theta\in[0,2\pi]} f_\rho = \min\left\{0, \pm\frac{\rho^2}{1+\rho^2}, \pm\frac{\rho}{2}\right\} = \min\left\{0, \frac{-\rho^2}{1+\rho^2}, \frac{-\rho}{2}\right\} = -\frac{\rho}{2}.$$

Di conseguenza

$$\lim_{\rho\to 0^+} M(\rho) = \lim_{\rho\to 0^+} m(\rho) = 0$$

e quindi il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ esiste ed è uguale a zero. □

Esempio 10. *Dire se esiste il limite, per $(x,y)\to(0,0)$, della funzione*

$$F(x,y) := \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(1+y^2)}.$$

Soluzione. In coordinate polari abbiamo

$$F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho\sin\theta}{\rho(1+\rho^2\sin^2\theta)} = \frac{\sin\theta}{1+\rho^2\sin^2\theta}.$$

Fissiamo $\rho > 0$ e studiamo la funzione

$$f_\rho : [0,2\pi] \to \mathbb{R}\ , \qquad f_\rho(\theta) := \frac{\sin\theta}{1+\rho^2\sin^2\theta}.$$

Per trovare il massimo e il minimo di f_ρ su $[0,2\pi]$, calcoliamo la derivata

$$f_\rho'(\theta) = \frac{\cos\theta\,(1-\rho^2\sin^2\theta)}{(1+\rho^2\sin^2\theta)^2}.$$

Supponiamo che il massimo di f_ρ sia raggiunto in un punto

$$\theta_M \in [0,2\pi],$$

e che il massimo di f_ρ sia raggiunto in

$$\theta_m \in [0,2\pi].$$

Quindi, abbiamo le seguenti possibilità per θ_M e θ_m :

(1) θ_M (rispettivamente θ_m) è uno degli estremi dell'intervallo $[0,2\pi]$;

(2) $\cos(\theta_M) = 0$ (rispettivamente $\cos(\theta_m) = 0$);

(3) $\sin(\theta_M) = \pm\frac{1}{\rho}$ (rispettivamente $\sin(\theta_m) = \pm\frac{1}{\rho}$).

Nel caso (1), abbiamo che

$$f_\rho(0) = f_\rho(2\pi) = 0.$$

Nel caso (2), osserviamo che:

$$\text{se} \quad \cos\theta = 0 \quad \text{allora necessariamente} \quad \sin(\theta) = 1 \quad \text{oppure} \quad \sin(\theta) = -1$$

e quindi

$$f_\rho(\theta) = \frac{1}{1+\rho^2} \qquad \text{oppure} \qquad f_\rho(\theta) = -\frac{1}{1+\rho^2}.$$

Il caso (3) invece non può verificarsi se $\rho > 1$.

Mettendo insieme i tre casi, abbiamo:

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]} f_\rho(\theta) = \frac{1}{1+\rho^2} \qquad \text{e} \qquad \min_{\theta\in[0,2\pi]} f_\rho(\theta) = -\frac{1}{1+\rho^2}.$$

Di conseguenza,

$$\lim_{\rho\to 0} m(\rho) = \lim_{\rho\to 0}\Big(-\frac{1}{1+\rho^2}\Big) = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\rho\to 0} M(\rho) = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{1+\rho^2} = 1,$$

e quindi il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ non esiste. $\square$