Liminf e limsup

Definizioni

Data una funzione

$$F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R} ,$$

definiamo:

$$\limsup_{X\to 0} F(X) = \sup\Big\{\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \ :\ \text{esiste una successione } \ X_n \to 0, \ \text{ tale che } \ \lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell\Big\}.$$

$$\liminf_{X\to 0} F(X) = \inf\Big\{\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \ :\ \text{esiste una successione } \ X_n \to 0, \ \text{ tale che } \ \lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell\Big\}.$$

Limiti, limsup e liminf

Proposizione 1. *Dati una funzione*

$$F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

ed $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*, sono equivalenti:*

(1) $\lim_{X\to 0} F(X) = L$;

(2) $\liminf_{X\to 0} F(X) = L$ *e* $\limsup_{X\to 0} F(X) = L$.

Dimostrazione. Definiamo l'insieme $\mathcal{I}$ come

$$\mathcal{I} := \Big\{\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \ :\ \text{esiste una successione } \ X_n \to 0 \ \text{ tale che } \ \lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell\Big\}.$$

Dimostriamo prima che (1) implica (2). Siccome per ipotesi

$$\lim_{X\to 0} F(X) = L ,$$

abbiamo che per ogni successione

$$X_n \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} , \quad \lim_{n\to\infty} X_n = 0 ,$$

si ha che

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = L .$$

Di conseguenza, l'unico elemento di $\mathcal{I}$ è il limite L. Quindi vale (2).

Supponiamo ora che (2) sia vero. Allora:

$$\sup \mathcal{I} = \inf \mathcal{I} = L.$$

Di conseguenza,

$$\mathcal{I} = \{L\}.$$

Data una successione

$$X_n \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} , \quad \lim_{n\to\infty} X_n = X_0 ,$$

supponiamo che

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) \neq L .$$

Allora, esiste una sottosuccessione

$$X_{n_k} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}\ , \quad \lim_{k\to\infty} X_{n_k} = 0\,,$$

tale che

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \qquad \text{e} \qquad \ell \neq L\,.$$

Ma questo implicherebbe che $\ell \in \mathcal{I}$ il che è impossibile. Quindi $\lim\limits_{n\to\infty} F(X_n) = L\,.$ □

Calcolo di limsup e liminf

Proposizione 2. *Sia $F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una funzione data. Per ogni raggio $r > 0$, definiamo*

$$M(r) := \sup_{\partial B_r} F \qquad e \qquad m(r) := \sup_{\partial B_r} F.$$

(i) *Se esiste il limite*

$$\overline{L} = \lim_{r\to\infty} M(r),$$

allora

$$\limsup_{X\to 0} F(X) = \overline{L}.$$

(ii) *Se esiste il limite*

$$\underline{L} = \lim_{r\to\infty} m(r),$$

allora

$$\liminf_{X\to 0} F(X) = \underline{L}.$$

Dimostrazione. Dimostriamo (i). Sia $X_n \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ una successione tale che

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell\,.$$

Definiamo

$$r_n := |X_n|.$$

Allora

$$F(X_n) \le \sup_{\partial B_{r_n}} F = M(r_n).$$

Passando al limite per $n \to +\infty$, otteniamo

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} F(X_n) \le \lim_{n\to+\infty} M(r_n) = \lim_{r\to\infty} M(r) = \overline{L}.$$

Siccome ℓ è un qualsiasi elemento dell'insieme

$$\mathcal{I} := \Big\{\ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\ :\ \text{esiste una successione}\ \ X_n \to 0\ \ \text{tale che}\ \ \lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell\Big\},$$

otteniamo che

$$\limsup_{X\to 0} F(X) = \sup \mathcal{I} \le \overline{L}.$$

D'altra parte, sia r_n una successione di raggi tale per cui

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} M(r_n) = \overline{L}.$$

Per la definizione di

$$M(r_n) = \sup_{X\in\partial B_{r_n}} F(X),$$

abbiamo che esiste

$$X_n \in \partial B_{r_n} \qquad \text{tale che} \qquad M(r_n) - \frac{1}{n} \le F(X_n) \le M(r_n).$$

Di conseguenza,

$$\lim_{n\to+\infty} F(X_n) = \lim_{n\to+\infty} M(r_n) = \overline{L}$$

e quindi $\overline{L}$ è un elemento dell'insieme $\mathcal{I}$. In conclusione $\overline{L}$ è il massimo di $\mathcal{I}$. Quindi, per definizone

$$\limsup_{X\to 0} F(X) = \sup \mathcal{I} = \max \mathcal{I} = \overline{L}. \quad \square$$

Esempio

Esempio 3. *Calcolare il limsup ed il liminf, per $(x,y)\to(0,0)$, della funzione*

$$F(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}\ .$$

Dimostrazione. In coordinate polari abbiamo

$$F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) = \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^4\sin^4\theta} = \frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}\ .$$

Quindi

$$\partial_\theta\Big[F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)\Big] = 0$$

se e solo se

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\theta\Big[r\cos\theta\sin^2\theta\Big]\Big(\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta\Big) - r\cos\theta\sin^2\theta\,\partial_\theta\Big[\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta\Big]\\
&= \Big(2r\sin\theta\cos^2\theta - r\sin^3\theta\Big)\Big(\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta\Big) - r\cos\theta\sin^2\theta\,\Big(-2\sin\theta\cos\theta + 4r^2\sin^3\theta\cos\theta\Big)\\
&= r\sin\theta\Big(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\Big)\Big(\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta\Big) + r\sin\theta\,\Big(2\sin^2\theta\cos^2\theta - 4r^2\sin^4\theta\cos^2\theta\Big)\\
&= r\sin\theta\Big[\cos^2\theta\Big(2-\sin^2\theta\Big) + r^2\Big(\sin^4\theta\Big(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\Big) - 4\sin^4\theta\cos^2\theta\Big)\Big]\\
&= r\sin\theta\Big[\cos^2\theta\Big(2-\sin^2\theta\Big) - r^2\Big(\sin^6\theta + 2\sin^4\theta\cos^2\theta\Big)\Big]\\
&= r\sin\theta\Big[\cos^2\theta\Big(2-\sin^2\theta\Big) - r^2\sin^4\theta\Big(1+\cos^2\theta\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Quando $\sin\theta = 0$, abbiamo che $F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) = 0$.

Consideriamo il caso

$$\cos^2\theta = \frac{r^2\sin^4\theta\big(1+\cos^2\theta\big)}{2-\sin^2\theta}.$$

Allora,

$$\cos^2\theta \le 2r^2,$$

e di conseguenza

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1 + O(r^2).$$

Tornando all'equazione per θ,

$$\cos^2\theta = \frac{r^2\big(1+O(r^2)\big)\big(1+O(r^2)\big)}{2-\big(1+O(r^2)\big)} = r^2\big(1+O(r^2)\big).$$

Quindi,

$$\sup_\theta F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) = \frac{r^2\sqrt{1+O(r^2)}\,\big(1+O(r^2)\big)}{r^2\big(1+O(r^2)\big) + r^2\big(1+O(r^2)\big)^2} = \frac{1}{2} + O(r^2)\,;$$

$$\inf_\theta F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) = -\frac{r^2\sqrt{1+O(r^2)}\,\big(1+O(r^2)\big)}{r^2\big(1+O(r^2)\big)+r^2\big(1+O(r^2)\big)^2} = -\frac{1}{2}+O(r^2)\,.$$

Di conseguenza,

$$\limsup_{r\to 0}\sup_\theta F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \liminf_{r\to 0}\inf_\theta F\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) = -\frac{1}{2}\,. \qquad \square$$

Un teorema più generale per il calcolo di liminf e limsup

Proposizione 4. *Siano $F:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ una funzione ed $L\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.*
Allora, sono equivalenti:

(i) $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = L\,;$

(ii) $\displaystyle\limsup_{\rho\to 0^+}\Big\{\sup_{\theta\in[0,2\pi]} F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\Big\} = L\,.$

Dimostrazione. Per ogni $\rho>0$ definiamo

$$M(\rho) := \sup_{\partial B_\rho} F.$$

Inoltre, siano $A,B\subset\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ gli insiemi

$$A := \Big\{a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\ :\ \text{esiste una successione}\ \ X_n\to 0,\ X_n\neq 0,\ \ \text{tale che}\ \ \lim_{n\to\infty}F(X_n)=a\Big\}.$$

$$B := \Big\{b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\ :\ \text{esiste una successione}\ \ \rho_n\to 0,\ \rho_n>0,\ \ \text{tale che}\ \ \lim_{n\to\infty}M(\rho_n)=b\Big\}.$$

Mostreremo che

$$\sup A = \sup B.$$

Sia $a\in A$. Allora, esiste una successione $X_n\to 0$ tale che

$$\lim_{n\to\infty}F(X_n)=a.$$

Ora, definendo

$$\rho_n := |X_n|,$$

abbiamo che

$$F(X_n)\le\sup_{\partial B_{\rho_n}}F = M(\rho_n).$$

Passando al limite per $n\to\infty$, otteniamo

$$a = \lim_{n\to+\infty}F(X_n)\le\limsup_{n\to+\infty}M(\rho_n)\le\limsup_{\rho\to+\infty}M(\rho)=\sup B. \tag{1}$$

Siccome questa disugaglianza è vera per ogni elemento $a\in A$, otteniamo che

$$\sup A\le\sup B.$$

Sia ora $b\in B$. Allora, esiste una successione di raggi $\rho_k>0$ tale che

$$\lim_{k\to+\infty}\rho_k = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{k\to+\infty}M(\rho_k)=b.$$

Per la definizione di

$$\sup_{X\in\partial B_{\rho_k}}F(X),$$

su ogni sfera ∂B_{ρ_k} possiamo trovare un punto X_k tale che

$$X_k \in \partial B_{\rho_k} \qquad \text{e} \qquad \big|F(X_k) - M(\rho_k)\big| \le \frac{1}{k}.$$

Abbiamo quindi costruito una successione $X_k \in \Omega$ tale che

$$|X_k| = \rho_k \to 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{k\to+\infty} F(X_k) = b.$$

Per la definizione di

$$\limsup_{X\to 0} F(X)$$

si ha che

$$b \le \limsup_{X\to 0} F(X) = \sup A.$$

Siccome questa disuguaglianza vale per ogni $b \in B$, otteniamo che

$$\sup B \le \sup A,$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$

Proposizione 5. *Siano $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione ed $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Allora, sono equivalenti:*

(i) $\liminf\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$;

(ii) $\liminf\limits_{\rho\to 0^+} \Big\{ \inf\limits_{\theta\in[0,2\pi]} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\Big\} = L.$

Un teorema utile per il calcolo di limsup e liminf

Teorema 6. *Consideriamo un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ed un punto $X_0 \in \Omega$. Consideriamo due funzioni*

$$F : \Omega \setminus \{X_0\} \to \mathbb{R} \qquad e \qquad G : \Omega \setminus \{X_0\} \to \mathbb{R},$$

tali che

$$\lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} \Big(F(X) - G(X)\Big) = 0\,.$$

Allora,

$$\limsup_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \limsup_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} G(X) \qquad e \qquad \liminf_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \liminf_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} G(X)\,.$$

Dimostrazione. Per ipotesi, per ogni successione

$$X_n \in \Omega\ , \quad \lim_{n\to\infty} X_n = X_0\ ,$$

si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \Big(F(X_n) - G(X_n)\Big) = 0\,.$$

Quindi, i seguenti due insiemi coincidono

$$A := \sup\Big\{\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\ :\ \text{esiste una successione}\ \ X_n \to X_0,\ X_n \in \Omega,\ \ \text{tale che}\ \ \lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell\Big\}\,;$$

$$B := \sup\Big\{\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\ :\ \text{esiste una successione}\ \ X_n \to X_0,\ X_n \in \Omega,\ \ \text{tale che}\ \ \lim_{n\to\infty} G(X_n) = \ell\Big\}\,.$$

Di conseguenza,

$$\sup A = \sup B \qquad \text{e} \qquad \inf A = \inf B,$$

ovvero

$$\limsup_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \limsup_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) \qquad \text{e} \qquad \liminf_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X) = \liminf_{\substack{X \to X_0 \\ X \in \Omega}} F(X)\,.$$

$\square$

Esempio 7. *Calcolare limsup e liminf, per* $(x, y) \to (0, 0)$*, della funzione*

$$F(x, y) := \frac{\sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ .$$

Soluzione. Definiamo la funzione

$$G(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Di conseguenza,,

$$F(x, y) - G(x, y) = \frac{\sin y - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ .$$

Ora, ricordiamo che siccome

$$\sin y = y - \frac{1}{6} y^3 + o(y^3),$$

abbiamo che esistono costanti $R > 0$ e $C > 0$ tali che

$$|\sin y - y| \le C|y|^3 \quad \text{per ogni} \quad y \in (-R, R).$$

Siccome $|y| \le \sqrt{x^2 + y^2}$, abbiamo che

$$|\sin y - y| \le C|y|^3 \le C\big(\sqrt{x^2 + y^2}\,\big)^3 \quad \text{per ogni} \quad (x, y) \in B_R.$$

Quindi, per ogni $(x, y) \in B_R$,

$$\big|F(x, y) - G(x, y)\big| \le \frac{|\sin y - y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le \frac{C\big(\sqrt{x^2 + y^2}\,\big)^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le C\big(x^2 + y^2\big),$$

il che implica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big(F(x, y) - G(x, y)\Big) = 0.$$

Applicando il teorema precedente, otteniamo

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x, y) = \limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{e} \qquad \liminf_{(x,y)\to(0,0)} F(x, y) = \liminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ .$$

Ora, osserviamo che in coordinate polari

$$G\big(\rho \cos \theta,\ \rho \sin \theta\big) = \sin \theta.$$

Di conseguenza

$$\limsup_{\rho \to 0} \left\{ \sup_{\theta \in [0,2\pi]} \frac{\sin\big(\rho \sin \theta\big)}{\rho} \right\} = \limsup_{\rho \to 0} \left\{ \sup_{\theta \in [0,2\pi]} \sin \theta \right\} = 1,$$

$$\liminf_{\rho \to 0} \left\{ \inf_{\theta \in [0,2\pi]} \frac{\sin\big(\rho \sin \theta\big)}{\rho} \right\} = \liminf_{\rho \to 0} \left\{ \inf_{\theta \in [0,2\pi]} \sin \theta \right\} = -1.$$

□

Esercizi sui limiti, liminf e limsup

Esercizio 8. *Studiare il comportamento (esistenza di limite, limsup e liminf), per* $(x, y) \to (0, 0)$*, delle funzioni seguenti:*

(1) $F(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 - xy}$;

(2) $F(x,y) = \dfrac{x^2 - xy^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

(3) $F(x,y) = \dfrac{x^3 + x^2 y^2}{x^2 + y^2}$;

(4) $F(x,y) = \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(5) $F(x,y) = \dfrac{e^{x+y} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(6) $F(x,y) = \dfrac{e^x - e^y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(7) $F(x,y) = \dfrac{\cos(\sqrt{x^2 + y^2}) - \cos x}{x^2 + y^2}$;

(8) $F(x,y) = \dfrac{\cos(x) - \cos(y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(9) $F(x,y) = \dfrac{(e^y - 1)\sin x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$.