Applicazioni miltilineari alternanti e forme differenziali

Applicazioni miltilineari alternanti. Definizione

Definizione 1. *Dato un numero naturale $k \geq 1$ ed uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, un'applicazione* **miltilineare** *su $\mathbb{R}^n$, è una mappa*

$$L : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ volte}} \to \mathbb{R}$$

lineare in ogni variabile, ovvero tale che, per una qualsiasi famiglia

$$X_1, \dots, X_k \in \mathbb{R}^n$$

di k vettori, si ha:

- *fissati un qualsiasi indice $j = 1, \dots, k$ ed un qualsiasi vettore $Y_j \in \mathbb{R}^n$,*
$$L\big(X_1, X_2, \dots, X_j + Y_j, \dots X_k\big) = L\big(X_1, X_2, \dots, X_j, \dots X_k\big) + L\big(X_1, X_2, \dots, Y_j, \dots X_k\big);$$
- *fissati un qualsiasi indice $j = 1, \dots, k$ ed un qualsiasi numero reale $\alpha \in \mathbb{R}$,*
$$L\big(X_1, X_2, \dots, \alpha X_j, \dots X_k\big) = \alpha L\big(X_1, X_2, \dots, X_j, \dots X_k\big).$$

Diremo che L è **multilineare alternante** *se scambiando una qualsiasi coppia di vettori, il valore di L cambia segno, ovvero:*

- *per ogni coppia di indici diversi $i \neq j \in \big\{1, \dots, k\big\}$ si ha che*
$$L\big(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k\big) = -L\big(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k\big).$$

Lo spazio delle applicazioni multilineari alternanti

Osservazione 2. *Osserviamo che se*

$$L_1 : \big(\mathbb{R}^n\big)^k \to \mathbb{R} \qquad e \qquad L_2 : \big(\mathbb{R}^n\big)^k \to \mathbb{R}$$

sono due applicazioni multilineari alternanti, allora anche la somma

$$L_1 + L_2 : \big(\mathbb{R}^n\big)^k \to \mathbb{R}$$

è multilineare alternante. Se invece

$$L : \big(\mathbb{R}^n\big)^k \to \mathbb{R},$$

è multilineare alternante e $\alpha \in \mathbb{R}$ è un numero reale, allora anche l'applicazione

$$\alpha L : \big(\mathbb{R}^n\big)^k \to \mathbb{R}$$

è multilineare alternante. Lo spazio delle applicazioni k-lineari alternanti su $\mathbb{R}^n$ è quindi uno spazio vettoriale.

Alcune osservazioni importanti

Osservazione 3. *Siano*

$$L : \big(\mathbb{R}^n\big)^k \to \mathbb{R},$$

un'applicazione multilineare alternante e

$$X_1, \dots, X_k \in \mathbb{R}^n$$

una famiglia di k vettori in $\mathbb{R}^n$.

- *Se esistono due indici $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$ tali che*
$$X_i = X_j,$$
allora
$$L\big(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k\big) = 0.$$

- *Di conseguenza, se i vettori $X_1, \dots, X_k$ sono linearmente dipendenti, allora*
$$L\big(X_1, X_2, \dots, X_k\big) = 0.$$
- *In particolare, se $k > n$, allora*
$$L \equiv 0,$$
ovvero, quando $k > n$, l'unica applicazione k-lineare alternante su $\mathbb{R}^n$ è quella nulla.

Le applicazioni $dx_i \wedge dx_j$

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Fissati due indici
$$i, j \in \{1, \dots, n\},$$
definiamo l'applicazione
$$dx_i \wedge dx_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
come
$$dx_i \wedge dx_j(A, B) = \det \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{pmatrix}$$
per ogni coppia di vettori
$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$
Osserviamo che:
- $dx_i \wedge dx_i = 0$;
- $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$.

Le applicazioni $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$

Di nuovo, consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Fissati tre indici
$$i, j, k \in \{1, \dots, n\},$$
definiamo l'applicazione
$$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
come
$$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k(A, B, C) = \det \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{pmatrix}$$
per ogni tripla di vettori
$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$
Osserviamo che:
- se due fra gli indici i, j, k sono uguali, allora $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k = 0$;
- scambiando l'ordine di **esattamente due** fra gli elementi dx_i, dx_j e dx_k, l'applicazione cambia segno, ovvero:
$$\begin{aligned} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k &= -dx_j \wedge dx_i \wedge dx_k && \text{(scambiando il primo ed il secondo)}, \\ dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k &= -dx_k \wedge dx_j \wedge dx_i && \text{(scambiando il primo ed il terzo)}, \\ dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k &= -dx_i \wedge dx_k \wedge dx_j && \text{(scambiando il secondo ed il terzo)}. \end{aligned}$$

Una base (canonica) per lo spazio delle applicazioni multilineari alternanti

Vale il teorema seguente (che lasceremo senza dimostrazione).

Teorema 4. *Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ ed un numero naturale*

$$1 \leq k \leq n$$

ogni applicazione multilineare alternante

$$L : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$$

si può scrivere in maniera unica come

$$L = \sum a_{i_1,i_2,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

dove $a_{i_1,i_2,\ldots,i_k} dx_{i_1}$ sono coefficienti reali e la sommatoria e su tutti gli indici

$$1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_k \leq n.$$

Forme differenziali

Definizione 5. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e k un numero naturale,*

$$1 \leq k \leq n.$$

Una k-forma differenziale α su Ω è una mappa (una funzione) che ad ogni punto $X \in \Omega$ assoccia un'applicazione k-lineare alternante $\alpha(X)$ (che a sua volta è una mappa da $(\mathbb{R}^n)^k$ a valori $\mathbb{R}$).

- *Osserviamo che, come corollario di Teorema 4, abbiamo che ogni k-forma su Ω si scrive in maniera unica come*
$$\alpha = \sum a_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(X)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$
dove la sommatoria e su tutti gli indici
$$1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_k \leq n,$$
e dove i coefficienti
$$a_{i_1,i_2,\ldots,i_k} : \Omega \to \mathbb{R}$$
sono funzioni definite su Ω.
- *Diciamo, inoltre, che la forma α è di classe C^1 (oppure C^2) se tutti i coefficienti*
$$a_{i_1,i_2,\ldots,i_k} : \Omega \to \mathbb{R}$$
sono funzioni di classe C^1 (o rispettivamente C^2) su Ω.
- *Per completezza, si possono definire anche le 0-forme su Ω. Precisamente, una 0-forma di classe C^1 su Ω è semplicemente una funzione*
$$F : \Omega \to \mathbb{R}$$
di classe C^1 su Ω.

Operazioni con forme differenziali

Somma di due forme differenziali (dello stesso ordine).

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e k un numero naturale, $1 \leq k \leq n$. Date due k-forme α e β su Ω,

$$\alpha = \sum a_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(X)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$
$$\beta = \sum b_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(X)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

definiamo la k-forma $\alpha + \beta$ su Ω come

$$\alpha + \beta = \sum \Big(a_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(X) + b_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(X) \Big)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\ .$$

Prodotto di una forma differenziale con una funzione.

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e k un numero naturale, $1 \le k \le n$. Date una k-forme α su Ω,

$$\alpha = \sum a_{i_1,i_2,\dots,i_k}(X)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

ed una funzione

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

definiamo la k-forma $f\alpha$ su Ω come

$$f\alpha = \sum \Big(f(X)\, a_{i_1,i_2,\dots,i_k}(X) \Big)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \ .$$

Prodotto esterno

Prodotto esterno di due 1-forme.

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e siano

$$\alpha = a_1(x)\, dx_1 + a_2(x)\, dx_2 + a_3(x)\, dx_3 + \cdots + a_n(x)\, dx_n,$$
$$\beta = b_1(x)\, dx_1 + b_2(x)\, dx_2 + b_3(x)\, dx_3 + \cdots + b_n(x)\, dx_n,$$

due 1-forme su Ω. Definiamo la 2-forma $\alpha \wedge \beta$ come

$$\alpha \wedge \beta := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i(x) b_j(x)\, dx_i \wedge dx_j.$$

Prodotto esterno di una k-forme con una ℓ-forma.

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e siano α e β rispettivamente una k-forma ed una ℓ-forma su Ω. Il prodotto esterno $\alpha \wedge \beta$ si definisce tramite le regole seguenti:

- Se $\alpha = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ e $\beta = dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell}$, allora
$$\alpha \wedge \beta = \Big(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \Big) \wedge \Big(dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \Big) = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \ .$$
- Se f e g sono funzioni, α è una k-forma e β è una l-forma, allora
$$(f(x)\alpha) \wedge (g(x)\beta) = f(x)g(x)\, \alpha \wedge \beta.$$
Per esempio,
$$\big(x^2\, dy\big) \wedge \big(y\, dx\big) = x^2 y\, dy \wedge dx = -x^2 y\, dx \wedge dy.$$
- Se α e β sono due k-forme e γ e δ sono l-forme, allora
$$(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma,$$
$$\alpha \wedge (\gamma + \delta) = \alpha \wedge \gamma + \alpha \wedge \delta.$$
Per esempio,
$$\begin{aligned} \big(x\, dx + y\, dy\big) \wedge \big(e^x\, dx + e^y\, dy\big) &= xe^x\, dx \wedge dx + xe^y\, dx \wedge dy + ye^x dy \wedge dx + ye^y\, dy \wedge dy \\ &= xe^y\, dx \wedge dy + ye^x dy \wedge dx \\ &= xe^y\, dx \wedge dy - ye^x\, dx \wedge dy \\ &= \big(xe^y - ye^x\big)\, dx \wedge dy. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \big(2x\, dx \wedge dy + 3y\, dy \wedge dz\big) \wedge \big(e^x\, dx + e^y\, dy\big) &= 2xe^x\, (dx \wedge dy) \wedge dx + 2xe^y\, (dx \wedge dy) \wedge dy \\ &\quad + 3ye^x (dy \wedge dz) \wedge dx + 3ye^y\, (dy \wedge dz) \wedge dy \\ &= 3ye^x dy \wedge dz \wedge dx \\ &= -3ye^x dy \wedge dx \wedge dz \qquad \text{(scambiando } dz \text{ e } dx) \\ &= 3ye^x dx \wedge dy \wedge dz \qquad \text{(scambiando } dy \text{ e } dx). \end{aligned}$$
- Osserviamo, inoltre, che vale la regola associativa. Se α, β e γ sono una k-forma, una l-forma e una m-forma su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, allora
$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

Derivata esterna e differenziale

Definizione 6. *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ ed*

$$F : \Omega \to \mathbb{R}$$

una funzione di classe C^m per un qualche $m \geq 1$. Definiamo il differenziale di F come

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(X)\, dx_i.$$

Osserviamo che dF è una 1-forma di classe C^{m-1} su Ω.

Più in generale, data una k-forma

$$\alpha \quad = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(X)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\,,$$

di classe C^m su Ω, definiamo la derivata esterna di α come

$$d\alpha \quad = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} da_{i_1 i_2 \ldots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\,.$$

Osserviamo che $d\alpha$ è una $(k+1)$-forma di classe C^{m-1}

Esercizi ed esempi di calcolo

Esercizio 7. *Usando le coordinate x, y in $\mathbb{R}^2$, calcolare*

- $d(x^2)$;
- $d(xy)$;
- $d(ye^x)$;
- $d\big(ydx\big)$;
- $d\big(xydy\big)$;
- $d\big(x\,dy - y\,dx\big)$;
- $d\big(x\,dx + y\,dy\big)$.

Esercizio 8. *Usando le coordinate x, y, z in $\mathbb{R}^2$, calcolare*

- $d(xyz)$;
- $d(x^2 z)$;
- $d(y\sin(z))$;
- $d\big(yzdx\big)$;
- $d(d(xyz))$.

Esercizio 9. *Scrivere come*

$$a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz,$$

oppure come

$$A(x,y,z)\,dy \wedge dz + B(x,y,z)\,dz \wedge dx + C(x,y,z)\,dx \wedge dy,$$

le forme differenziali seguenti.

(1) $d\left(\frac{xy}{z}\right)$
(2) $d(x-y)$
(3) $d(xy - yz + zx)$
(4) $d(x-y) \wedge d(y-z)$
(5) $d(x+z) \wedge d(x-z)$
(6) $d(xy) \wedge d(xz)$
(7) $d\big(zd(xy)\big)$;
(8) $d(d(xy))$
(9) $d(d(x^2 - z^2))$
(10) $d(xy) \wedge (y\,dx - x\,dy)$.

Esercizio 10. *Calcolare*

$$d\left(-\frac{1}{y}dx + \frac{1}{x}dy\right).$$

Esercizio 11. *Calcolare*

$$d\left(\frac{-y}{x+y}dx + \frac{x}{x+y}dy\right).$$

Esercizio 12. *Calcolare*

$$d\left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right).$$

Esercizio 13. *Sia* $\varphi : R \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1. *Calcolare*

$$d\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\varphi(x^2+y^2)dx + \frac{x}{x^2+y^2}\varphi(x^2+y^2)dy\right).$$

Soluzioni degli Esercizi 7 e 8

Esercizio 7

- $d(x^2) = 2x\,dx\,;$
- $d(xy) = y\,dx + x\,dy\,;$
- $d(ye^x) = ye^x\,dx + e^x\,dy\,;$
- $d\big(ydx\big) = dy \wedge dx = -dx \wedge dy\,;$
- $d\big(xydy\big) = d(xy) \wedge dy = \big(y\,dx + x\,dy\big) \wedge dy = y\,dx \wedge dy\,;$
- $d\big(x\,dy - y\,dx\big) = dx \wedge dy - dy \wedge dx = 2\,dx \wedge dy\,;$
- $d\big(x\,dx + y\,dy\big) = dx \wedge dx + dy \wedge dy = 0.$

Esercizio 8

- $d(xyz) = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz\,;$
- $d(x^2z) = 2xz\,dx + x^2\,dz\,;$
- $d(y\sin(z)) = \sin z\,dy + y\cos z\,dz\,;$
- $d\big(yzdx\big) = d(yz) \wedge dx = \big(z\,dy + y\,dz\big) \wedge dx = z\,dy \wedge dx + y\,dz \wedge dx = -z\,dx \wedge dy + y\,dz \wedge dx\,;$
- $$\begin{aligned} d(d(xyz)) &= d\big(yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz\big) \\ &= d(yz) \wedge dx + d(xz) \wedge dy + d(xy) \wedge dz \\ &= \big(z\,dy + y\,dz\big) \wedge dx + \big(z\,dx + x\,dz\big) \wedge dy + \big(x\,dy + y\,dx\big) \wedge dz \\ &= z\,dy \wedge dx + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy + x\,dz \wedge dy + x\,dy \wedge dz + y\,dx \wedge dz \\ &= 0. \end{aligned}$$