Curve parametriche

Curve in $\mathbb{R}^n$

Una curva in $\mathbb{R}^n$ è una funzione continua

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n.$$

Analogamente, dato un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, una curva in Ω è una funzione continua

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

a valori in Ω, ovvero tale che

$$\gamma(t) \in \Omega \quad \text{per ogni} \quad t \in [a,b].$$

Infine, dati un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e due punti $X, Y \in \Omega$, diciamo che la curva (in Ω)

$$\gamma : [a,b] \to \Omega$$

connette X a Y (in Ω), se

$$\gamma(a) = X \qquad \text{e} \qquad \gamma(b) = Y.$$

Sostegno di una curva

Data una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, si dice **sostegno di** γ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$

$$\Big\{\gamma(t) \ : \ t \in [a,b]\Big\}.$$

Curve C^1

Definizione 1. Sia $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva in $\mathbb{R}^n$.

Diciamo che **la curva γ è di classe** $C^1([a,b])$ se ogni sua componente

$$\gamma_i : [a,b] \to \mathbb{R}$$

è di classe $C^1([a,b])$, ovvero se per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha che:

- la componente γ_i è una funzione derivabile su (a,b);
- negli estremi dell'intervallo $[a,b]$ esistono le derivate

$$\gamma_i'(a) := \lim_{t \to 0^+} \frac{\gamma_i(a+t) - \gamma_i(a)}{t} \qquad \text{e} \qquad \gamma_i'(a) := \lim_{s \to 0^-} \frac{\gamma_i(b+s) - \gamma_i(b)}{s} \ ;$$

- la funzione $\gamma_i' : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua.

Vettore tangente

Definizione 2. *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe $C^1([a,b])$ e sia $t \in [a,b]$. Il vettore*

$$\gamma'(t) := \big(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_n'(t)\big)\,,$$

è detto **vettore tangente** *alla curva γ nel punto $\gamma(t)$.*

Se $\gamma'(t) \neq 0$, allora possiamo definire il vettore normalizzato

$$\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \in \mathbb{R}^n \ , \quad \textit{dove} \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{\big(\gamma_1'(t)\big)^2 + \big(\gamma_2'(t)\big)^2 + \dots + \big(\gamma_n'(t)\big)^2} \ .$$

Il vettore $\dfrac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ *è detto* **versore tangente** *alla curva γ nel punto $\gamma(t)$.*

CURVE C^1 A TRATTI

Diciamo che una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è C^1 **a tratti** se esiste una partizione di $[a,b]$

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = b$$

tale che $\gamma : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{R}^n$ è di classe $C^1([t_{j-1}, t_j])$ per ogni $j = 1, \ldots, k$.

Per esempio, la curva che parametrizza il bordo del quadrato $[0,1] \times [0,1]$

$$\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2 \ , \qquad \gamma(t) = \begin{cases} (t,0) & \text{per} \quad t \in [0,1], \\ (1, t-1) & \text{per} \quad t \in [1,2], \\ (3-t, 1) & \text{per} \quad t \in [2,3], \\ (0, 4-t) & \text{per} \quad t \in [3,4]. \end{cases}$$

è una curva C^1 a tratti.

CURVE CHIUSE

Diciamo che la curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è **chiusa** , se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Per esempio, la curva che parametrizza la circonferenza di raggio 7 e centro l'origine, ∂B_7, in $\mathbb{R}^2$

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \ , \qquad \gamma(t) = \big(7\cos t \, , \, 7 \sin t\big)$$

è una curva chiusa.

CURVE SEMPLICI

Diciamo che la curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è **semplice**, se la funzione

$$\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$$

è iniettiva, ovvero se vale

$$\gamma(t) \neq \gamma(s) \quad \text{per ogni coppia di punti} \quad t, s \in (a,b) \quad \text{con} \quad t \neq s.$$

ESEMPI

Esempio 3. *La curva*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

è semplice, chiusa e di classe C^1. Inoltre, il suo versore tangente è

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

Infatti, abbiamo $|\gamma'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$.

Esempio 4. *La curva*

$$\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

è chiusa, ma non è semplice.

Esempio 5. *La curva*

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

è semplice, ma non chiusa. Infatti $\gamma(0) = (1,0) \neq (-1,0) = \gamma(\pi)$.

Esempio 6. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1([a,b])$. Allora la curva*

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \big(t, f(t)\big),$$

è di classe C^1 e parametrizza il grafico di f. La curva γ è semplice, ma non chiusa. Inoltre,

$$\gamma'(t) = \big(1, f'(t)\big) \qquad e \qquad |\gamma'(t)| = \sqrt{1 + (\gamma'(t))^2} \ .$$

Concatenamento di curve

Definizione 7 (Concatenamento)**.** Date due curve

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad \sigma : [b, c] \to \mathbb{R}^n,$$

tali che $\gamma(b) = \sigma(b)$, definiamo il concatenamento $\gamma * \sigma : [a, c] \to \mathbb{R}^n$ come

$$\gamma * \sigma(t) := \begin{cases} \gamma(t), & \text{se} \quad t \in [a, b]; \\ \sigma(t), & \text{se} \quad t \in [b, c]. \end{cases}$$

Osserviamo che se γ e σ sono C^1 a tratti, allora anche la curva $\gamma * \sigma$ lo è.

Curve inverse (curve opposte)

Definizione 8. Date una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, definiamo la curva inversa

$$\gamma_- : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

come

$$\gamma_-(t) := \gamma(a + b - t) \quad \text{per ogni} \quad t \in [a, b].$$

Osserviamo che se γ è C^1 a tratti, allora anche γ_- lo è. Inoltre,

- γ è chiusa $\Leftrightarrow$ γ_- è chiusa;
- γ è semplice $\Leftrightarrow$ γ_- è semplice;
- $\gamma'(t) = -\gamma_-'(a + b - t)$ e $|\gamma'|(t) = |\gamma_-'|(a + b - t)$ per ogni $t \in [a, b]$.

Esempi di curve parametriche

Esercizio 9. *Trovare una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; f(x) < y < g(x),$$

dove:

(1) $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = x^4 - 1$.
(2) $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - x$.
(3) $f(x) = e^x$, $g(x) = 3 - 2e^{-x}$.

Esercizio 10. *Trovare una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del rettangolo* $[1, 2] \times [3, 4]$.

Esercizio 11. *Trovare una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in B_1 \;:\; y \geq 0.$$

Esercizio 12. *Trovare una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in B_1 \;:\; y \leq x, \; x \geq 0.$$

Esercizio 13. *Trovare una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in (a, b) \times \mathbb{R} \;:\; g(x) < y < f(x),$$

dove:

(1) $(a, b) = (-1, 1)$, $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = -1 - x^2$.
(2) $(a, b) = (0, 1)$, $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = -x^2 - x$.

Esercizio 14. *Trovare una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x, y) \in B_{2\sqrt{2}} \;:\; x \geq 0, \; -x^2 - x \leq y \leq x^2 + x.$$

Curve equivalenti

Definizione 15. Diciamo che le curve

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad \sigma : [A, B] \to \mathbb{R}^n$$

sono **equivalenti**, se esiste una funzione

$$g : [a, b] \to [A, B],$$

di classe $C^1([a, b])$ tale che

$$g(a) = A\,, \quad g(b) = B \quad \text{e} \quad g' > 0 \ \text{ su } \ [a, b]$$

e tale che

$$\gamma(t) = \sigma(g(t)) \qquad \text{per ogni} \qquad t \in [a, b].$$

Si dice anche che γ è una riparametrizzazione di σ.

Osservazione 16. *Date due curve equivalenti*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \qquad e \qquad \sigma : [A, B] \to \mathbb{R}^n,$$

abbiamo che:

- γ *è semplice* $\quad\Leftrightarrow\quad$ σ *è semplice;*
- γ *è chiusa* $\quad\Leftrightarrow\quad$ σ *è chiusa;*
- γ *è* C^1 $\quad\Leftrightarrow\quad$ σ *è* C^1*;*
- γ *è* C^1 *a tratti* $\quad\Leftrightarrow\quad$ σ *è* C^1 *a tratti.*

Osservazione 17 (Versore tangente). *Supponiamo che le curve*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \qquad e \qquad \sigma : [A, B] \to \mathbb{R}^n$$

siano equivalenti e di classe C^1*. Sia* $g : [a, b] \to [A, B]$ *la funzione tale che*

$$\gamma(t) = \sigma(g(t)) \qquad \textit{per ogni} \quad t \in [a, b].$$

Sia X *un punto del sostegno delle curve* σ *e* γ *e siano*

$$t \in [a, b] \qquad e \qquad T \in [A, B]$$

tali che $T = g(t)$ *e*

$$\gamma(t) = \sigma(T) = X.$$

Allora i vettori tangenti di γ *e* σ *nel punto* X *sono colineari, infatti*

$$\gamma'(t) = g'(t)\sigma'(g(t)) = g'(t)\sigma'(T).$$

Osserviamo che siccome $g'(t) > 0$ *(per la definizione di curve equivalenti), si ha che*

$$\gamma'(t) \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sigma'(T) \neq 0.$$

Supponiamo ora che

$$\sigma'(T) \neq 0.$$

Allora, **le curve** σ **e** γ **hanno lo stesso versore tangente nel punto** X**.** *Infatti,*

$$\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{\sigma'(g(t))g'(t)}{|\sigma'(g(t))g'(t)|} = \frac{\sigma'(T)}{|\sigma'(T)|}\frac{g'(t)}{|g'(t)|} = \frac{\sigma'(T)}{|\sigma'(T)|}\ .$$