Derivazione sotto il segno dell'integrale

Lemma 1. *Sia*

$$\mathcal{R} = [a, b] \times (C, D)$$

un rettangolo in $\mathbb{R}^2$*. Sia* $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione tale che:*

- *per ogni fissato* $x \in [a, b]$ *la funzione*
$$f(x, \cdot) : (C, D) \to \mathbb{R}$$
è derivabile sull'intervallo (C, D)*; in un punto* $y \in (C, D)$ *indicheremo la sua derivata con* $\partial_y f(x, y)$*;*
- *la funzione*
$$\partial_y f : [a, b] \times (C, D) \to \mathbb{R}$$
è continua su $[a, b] \times (C, D)$*.*

Allora, la funzione

$$F : (C, D) \to \mathbb{R}, \qquad F(y) := \int_a^b f(x, y)\, dx$$

è derivabile su (C, D) *e per ogni* $y \in (C, D)$ *si ha*

$$F'(y) = \int_a^b \partial_y f(x, y)\, dx.$$

Dimostrazione: Sia $h \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\Big(F(y+h) - F(y)\Big) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x, y+h)\, dx - \int_a^b f(x, y)\, dx\right)\\ &= \int_a^b \frac{1}{h}\Big(f(x, y+h) - f(x, y)\Big)\, dx\end{aligned}$$

Per il Teorema di Lagrange abbiamo che, per ogni $x \in [a, b]$ e $h \in \mathbb{R}$ esiste $\xi_{x,h}$ tale che $|\xi_{x,h}| \le |h|$ e

$$\frac{1}{h}\Big(f(x, y+h) - f(x, y)\Big) = \partial_y f\big(x, y + \xi_{x,h}\big).$$

Inoltre, l'uniforme continuità di $\partial_y f$ implica che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\text{se} \quad |y' - y| < \delta \quad \text{allora} \quad \big|\partial_y f(x, y') - \partial_y f(x, y)\big| < \varepsilon\ .$$

In particolare, quando $|h| < \delta$,

$$\big|\partial_y f\big(x, y + \xi_{x,h}\big) - \partial_y f(x, y)\big| < \varepsilon\ .$$

Di conseguenza, sempre quando $|h| < \delta$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\Big(F(y+h) - F(y)\Big) - \int_a^b \partial_y f(x, y)\, dx\right| &= \left|\int_a^b \partial_y f\big(x, y + \xi_{x,h}\big)\, dx - \int_a^b \partial_y f(x, y)\, dx\right|\\ &\le \int_a^b \big|\partial_y f\big(x, y + \xi_{x,h}\big) - \partial_y f(x, y)\big|\, dx \le (a - b)\varepsilon.\end{aligned}$$

In conclusione,

$$\lim_{h \to 0} \left|\frac{1}{h}\Big(F(y+h) - F(y)\Big) - \int_a^b \partial_y f(x, y)\, dx\right| = 0.$$

□