Integrazione su domini rettangolari

In questa prima sezione definiremo l'integrale di Riemann di funzioni limitate su domini della forma

$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \qquad \text{in} \qquad \mathbb{R}^n\ .$$

La costruzione è generale e funziona in tutte le dimensioni. Per semplicità, ci concentreremo sul caso $n = 2$.

Il dominio e la funzione. In $\mathbb{R}^2$ consideriamo un rettangolo

$$\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$$

ed una funzione limitata

$$F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}.$$

Partizioni. Siano

$$\mathcal{P}_{[a,b]} := \big\{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b\big\}$$

$$\mathcal{P}_{[c,d]} := \big\{c = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = d\big\}$$

due partizioni rispettivamente degli intervalli $[a, b]$ e $[c, d]$. Per ogni $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, definiamo il rettangolo

$$\mathcal{R}_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j].$$

Diremo che la famiglia di rettangoli

$$\mathcal{P} := \big\{R_{ij}\ :\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\big\}$$

è una partizione di $\mathcal{R}$ generata dalle partizioni $\mathcal{P}_{[a,b]}$ e $\mathcal{P}_{[c,d]}$.

Raffinamenti. Sia $\mathcal{Q}$ un'altra partizione di $\mathcal{R}$ generata da $\mathcal{Q}_{[a,b]}$ e $\mathcal{Q}_{[c,d]}$. Diremo che $\mathcal{Q}$ è più fine di $\mathcal{P}$, se $\mathcal{Q}_{[a,b]}$ è più fine di $\mathcal{P}_{[a,b]}$ e $\mathcal{Q}_{[c,d]}$ è più fine di $\mathcal{P}_{[c,d]}$.

Le somme di Riemann. Per ogni partizione $\mathcal{P}$ di R definiamo:

- *la somma di Riemann inferiore*

$$s(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |R_{ij}| \inf_{(x,y) \in R_{ij}} F(x, y)\ ,$$

- *la somma di Riemann superiore*

$$S(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |R_{ij}| \sup_{(x,y) \in R_{ij}} F(x, y)\ ,$$

Dove R_{ij} è l'area (in dimensione più alta, il volume) del rettangolo R_{ij} :

$$R_{ij} = (t_i - t_{i-1})(s_j - s_{j-1}).$$

Il lemma del raffinamento. Come in dimensione uno, il lemma che permette di avere una teoria di integrazione secondo Riemann è il seguente:

Lemma 1 (Lemma del raffinamento)**.**

(i) Per ogni partizione $\mathcal{P}$, $s(\mathcal{P}) \le S(\mathcal{P})$.

(ii) Se $\mathcal{Q}$ è più fine di $\mathcal{P}$, allora

$$s(\mathcal{P}) \le s(\mathcal{Q}) \le S(\mathcal{Q}) \le S(\mathcal{P}).$$

Dimostrazione: Come in dimensione 1. □

Integrabilità secondo Riemann. Per il lemma del raffinamento, abbiamo che per ogni funzione F

$$\sup\Big\{s(\mathcal{P})\ :\ \mathcal{P}\ \text{ partizione di }\ \mathcal{R}\Big\}\le\inf\Big\{S(\mathcal{Q})\ :\ \mathcal{Q}\ \text{ partizione di }\ \mathcal{R}\Big\}.$$

Diremo che la funzione $F:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann, se

$$\sup\Big\{s(\mathcal{P})\ :\ \mathcal{P}\ \text{ partizione di }\ \mathcal{R}\Big\}=\inf\Big\{S(\mathcal{Q})\ :\ \mathcal{Q}\ \text{ partizione di }\ \mathcal{R}\Big\}.$$

Se la funzione F risulta integrabile, definiamo

$$\int_{\mathcal{R}}F=\sup\Big\{s(\mathcal{P})\ :\ \mathcal{P}\ \text{ partizione di }\ \mathcal{R}\Big\}=\inf\Big\{S(\mathcal{Q})\ :\ \mathcal{Q}\ \text{ partizione di }\ \mathcal{R}\Big\}.$$

In dimensione 2 scriveremo $\int_{\mathcal{R}}F$ come un integrale doppio:

$$\int_{\mathcal{R}}F=\iint_{\mathcal{R}}F(x,y)\,dx\,dy.$$

Criteri di integrabilità

Lemma 2 (Criterio di integrabilità 1. Il criterio base)**.**
Siano $\mathcal{R}=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ e $F:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$ una funzione data. Se vale la proprietà seguente:

"Per ogni $\varepsilon>0$ esiste una partizione $\mathcal{P}$ tale che $S(\mathcal{P})-s(\mathcal{P})<\varepsilon$."

allora la funzione F è integrabile.

Dimostrazione: Fissiamo $\varepsilon>0$ e prendiamo $\mathcal{P}$ come sopra. Per il lemma del raffinamento, abbiamo che

$$\inf_{\mathcal{Q}}S(\mathcal{Q})-\sup_{\mathcal{Q}}s(\mathcal{Q})\le S(\mathcal{P})-s(\mathcal{P})<\varepsilon.$$

Siccome ε è arbitrario, abbiamo la tesi. $\square$

Come conseguenza otteniamo:

Lemma 3 (Criterio di integrabilità 2. Il criterio che useremo per le funzioni continue su $\mathcal{R}$)**.**
Siano $\mathcal{R}=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ e $F:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$ una funzione data. Se vale la proprietà seguente:

"Per ogni $\varepsilon>0$ esiste una partizione $\big\{R_{ij}\ :\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\big\}$
tale che per ogni $1\le i\le m$ ed ogni $1\le j\le n$ abbiamo che
$F(X)-F(Y)<\varepsilon$ per ogni coppia di punti $X,Y\in R_{ij}$."

allora la funzione F è integrabile.

Dimostrazione: Fissiamo $\varepsilon>0$ e prendiamo $\mathcal{P}$ come sopra. Per il lemma del raffinamento, abbiamo che

$$\inf_{\mathcal{Q}}S(\mathcal{Q})-\sup_{\mathcal{Q}}s(\mathcal{Q})\le S(\mathcal{P})-s(\mathcal{P}).$$

Ora, siccome per ogni rettangolo R_{ij}

$$F(X)-F(Y)<\varepsilon\quad\text{per ogni coppia di punti}\quad X,Y\in R_{ij},$$

abbiamo che

$$\sup_{R_{ij}}F-\inf_{R_{ij}}F\le\varepsilon.$$

Di conseguenza,

$$S(\mathcal{P})-s(\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|R_{ij}|\Big(\sup_{R_{ij}}F-\inf_{R_{ij}}F\Big)\le\varepsilon\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|R_{ij}|=\varepsilon|\mathcal{R}|.$$

In conclusione

$$\inf_{\mathcal{Q}}S(\mathcal{Q})-\sup_{\mathcal{Q}}s(\mathcal{Q})\le S(\mathcal{P})-s(\mathcal{P})\le\varepsilon|\mathcal{R}|.$$

$\square$

Lemma 4 (Criterio di integrabilità 3)**.** *Siano $\mathcal{R}=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ e $F:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$ una funzione data. Supponiamo che per ogni $\varepsilon>0$ esiste una partizione*

$$\mathcal{P}=\big\{R_{ij}\ :\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\big\}$$

che può essere suddivisa in due gruppi di rettangoli $\mathcal{P}=\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2$:

- *il primo gruppo di rettangoli $\mathcal{P}_1$ ha la proprietà seguente :*
$$F(X) - F(Y) < \varepsilon \quad \textit{per ogni coppia di punti} \quad X, Y \in R_{ij} \quad \textit{e per ogni} \quad R_{ij} \in \mathcal{P}_1 \ .$$
- *il secondo gruppo di rettangoli $\mathcal{P}_2$ è tale che*
$$\sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}_2} |R_{ij}| < \varepsilon.$$

Allora la funzione F è integrabile su $\mathcal{R}$.

Dimostrazione: Siccome F è limitata, esiste $M > 0$ tale che
$$|F(X)| \leq M \quad \text{per ogni} \quad X \in \mathcal{R}.$$
Ora, calcoliamo
$$\begin{aligned}
S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) &= \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} |R_{ij}| \Big(\sup_{R_{ij}} F - \inf_{R_{ij}} F \Big) \\
&= \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}_1} |R_{ij}| \Big(\sup_{R_{ij}} F - \inf_{R_{ij}} F \Big) + \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}_2} |R_{ij}| \Big(\sup_{R_{ij}} F - \inf_{R_{ij}} F \Big) \\
&\leq \varepsilon \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}_1} |R_{ij}| + 2M \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}_2} |R_{ij}| \\
&\leq \varepsilon \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}_1} |R_{ij}| + 2M\varepsilon \\
&\leq \varepsilon \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} |R_{ij}| + 2M\varepsilon \\
&= \big(|\mathcal{R}| + 2M \big) \varepsilon.
\end{aligned}$$
Di conseguenza,
$$\inf_{\mathcal{Q}} S(\mathcal{Q}) - \sup_{\mathcal{Q}} s(\mathcal{Q}) \leq S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) \leq \big(|\mathcal{R}| + 2M \big) \varepsilon.$$
Siccome ε è arbitrario, abbiamo la tesi. □

Funzioni continue su domini rettangolari

Ricordiamo che una funzione continua su un insieme compatto è uniformemente continua, ovvero che vale il seguente teorema.

Teorema 5 (Teorema di Cantor in $\mathbb{R}^n$)**.** *Sia $\mathcal{K}$ un insieme compatto in $\mathbb{R}^n$ e sia $F : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $\mathcal{K}$. Allora, F è uniformemente continua:*

"Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

se $|X - Y| < \delta$ $(X, Y \in \mathcal{K})$, allora $|F(X) - F(Y)| < \varepsilon$."

Teorema 6 (Integrabilità delle funzioni continue sui rettangoli)**.** *Siano $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ e $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora F è integrabile su $\mathcal{R}$.*

Dimostrazione. Il teorema di Cantor implica che per ogni ε possiamo trovare una partizione che soddisfa il secondo criterio di integrabilità. □

Lo stesso teorema (con la stessa dimostrazione) vale in $\mathbb{R}^n$.

Teorema 7 (Integrabilità delle funzioni continue su rettangoli in $\mathbb{R}^n$)**.** *Siano*
$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$
e $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora F è integrabile su $\mathcal{R}$.