Teorema della divergenza in domini normali

Divergenza di un campo vettoriale

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia F il campo vettoriale

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^2, \qquad \Phi(x,y) = \big(F(x,y), G(x,y)\big).$$

La divergenza di Φ è definita come:

$$\operatorname{div} \Phi(x,y) = \partial_x F(x,y) + \partial_y G(x,y).$$

Più in generale, se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed Φ è un campo vettoriale

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n, \qquad \Phi(X) = \big(\Phi_1(X), \Phi_2(X), \dots, \Phi_n(X)\big),$$

allora

$$\operatorname{div} \Phi(X) = \partial_{x_1}\Phi_1(X) + \partial_{x_2}\Phi_2(X) + \cdots + \partial_{x_n}\Phi_n(X).$$

Teorema della divergenza in domini normali

Teorema 1 (Teorema della divergenza in domini normali)**.** *Siano*

$$u : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad e \qquad v : [a,b] \to \mathbb{R}$$

due funzioni di classe $C^1([a,b])$ e tali che

$$u(x) < v(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in (a,b),$$

e sia

$$D = \Big\{(x,y) \ : \ x \in [a,b],\ u(x) \le y \le v(x)\Big\}$$

il dominio normale semplice determinato da u e v. Sia Φ un campo vettoriale

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \Phi(x,y) = \big(F(x,y), G(x,y)\big),$$

di classe C^1. Allora

$$\iint_D \operatorname{div} \Phi(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial D} \Phi \cdot \nu_\Omega,$$

dove ν_D è il versore (quindi un vettore di norma 1) normale al bordo uscente da D.

Dimostrazione. Osserviamo che il bordo di D è dato da

$$\begin{aligned}
\partial D = &\Big\{(x,v(x)) \ : \ x \in [a,b]\Big\} \qquad \text{(il grafico di } g)\\
&\cup \Big\{(x,u(x)) \ : \ x \in [a,b]\Big\} \qquad \text{(il grafico di } f)\\
&\cup \Big\{(a,y) \ : \ y \in [f(a), g(a)]\Big\} \qquad \text{(il lato verticale sinistro)}\\
&\cup \Big\{(b,y) \ : \ y \in [f(b), g(b)]\Big\} \qquad \text{(il lato verticale destro)}
\end{aligned}$$

Allora abbiamo:

$$\nu_D(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(-v'(x),1)}{\sqrt{1+(v'(x))^2}} & \text{sul grafico di } g\\[2ex] -\dfrac{(-u'(x),1)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}} & \text{sul grafico di } f\\[2ex] (-1,0) \quad \text{sul lato verticale sinistro}\\ (1,0) \quad \text{sul lato verticale destro.} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\iint_\Omega \operatorname{div}\Phi(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \Big(\partial_x F(x,y)+\partial_y G(x,y)\Big)\,dy\,dx \\
&= \int_a^b \Big(G\big(x,v(x)\big)-G\big(x,u(x)\big)\Big)\,dx \\
&\qquad + \int_a^b u'(x)\,F\big(x,u(x)\big)\,dx - \int_a^b v'(x)\,F\big(x,v(x)\big)\,dx \\
&\qquad\qquad + \int_{u(b)}^{v(b)} F(b,y)\,dy \\
&\qquad\qquad\quad - \int_{u(a)}^{v(a)} F(a,y)\,dy \\
&= \int_a^b \Big(-v'(x)\,F\big(x,v(x)\big)+G\big(x,v(x)\big)\Big)\,dx \\
&\qquad - \int_a^b \Big(-u'(x)\,F\big(x,u(x)\big)+G\big(x,u(x)\big)\Big)\,dx \\
&\qquad\qquad + \int_{u(b)}^{v(b)} F(b,y)\,dy \\
&\qquad\qquad\quad - \int_{u(a)}^{v(a)} F(a,y)\,dy = \int_\gamma \Phi\cdot\nu_D,
\end{aligned}
$$

dove γ è la curva semplice chiusa che parametrizza il bordo di ∂D in senso antiorario. $\square$

Teorema della divergenza in domini regolari

Definizione 2. *Diciamo che $D\subset\mathbb{R}^n$ è un dominio C^1, se D è un compatto e se per ogni punto*

$$X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\partial D,$$

esistono

- *un rettangolo aperto*
$$\mathcal{R}_X=(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1)\times(x_2-\delta_2,x_2+\delta_2)\times\cdots\times(x_n-\delta_n,x_n+\delta_n)\ ;$$
- *un indice $i\in\{1,\dots,n\}$ (supponiamo che $i=n$) ed una funzione*
$$\eta:(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1)\times(x_2-\delta_2,x_2+\delta_2)\times\cdots\times(x_{n-1}-\delta_{n-1},x_{n-1}+\delta_{n-1})\to(x_n-\delta_n,x_n+\delta_n)$$
di classe C^1 tale che vale uno dei casi seguenti :

Caso 1. $D\cap\mathcal{R}_X=\Big\{(y_1,\dots,y_n)\in\mathcal{R}_X\ :\ y_n\le\eta(y_1,\dots,y_{n-1})\Big\}$;

Caso 2. $D\cap\mathcal{R}_X=\Big\{(y_1,\dots,y_n)\in\mathcal{R}_X\ :\ y_n\ge\eta(y_1,\dots,y_{n-1})\Big\}$.

In entrambi i casi, il bordo di D in $\mathcal{R}_X$ è dato da

$$\partial D\cap\mathcal{R}_X=\Big\{(y_1,\dots,y_n)\in\mathcal{R}_X\ :\ y_n=\eta(y_1,\dots,y_{n-1})\Big\}.$$

Definizione 3. *Sia D un dominio in $\mathbb{R}^n$. Un intorno di D è un aperto che contiene D.*

Teorema 4 (Teorema della divergenza in domini regolari)**.** *Sia D un dominio in $\mathbb{R}^2$ con bordo ∂D di classe C^1. Sia Ω un intorno di D e sia Φ un campo vettoriale*

$$\Phi:\Omega\to\mathbb{R}^2,\qquad \Phi(x,y)=\big(F(x,y),G(x,y)\big),$$

di classe C^1. Allora

$$\int_D \operatorname{div}\Phi(x,y)\,dx\,dy=\int_{\partial D}\Phi\cdot\nu_D,$$

dove $\nu_D:\partial D\to\mathbb{R}$ è il versore normale uscente su ∂D.

Esercizi

Esercizio 5. *Sia D il dominio*
$$D = \overline{B}_2 \setminus B_1,$$
e sia F il campo vettoriale
$$F(x,y) = (x^2, y^2).$$
Calcolare
$$\iint_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 6. *Sia D il dominio*
$$D = \overline{B}_2 \setminus B_1,$$
e sia F il campo vettoriale
$$F(x,y) = (x, y^2).$$
Calcolare
$$\iint_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 7. *Sia D il dominio*
$$D = \overline{B}_2 \setminus B_1,$$
e sia F il campo vettoriale
$$F(x,y) = (x^3, y).$$
Calcolare
$$\iint_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 8. *Sia D il dominio*
$$D = \overline{B}_2 \setminus B_1,$$
e sia F il campo vettoriale
$$F(x,y) = (x^3, y).$$
Calcolare
$$\iint_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 9. *Sia D il dominio*
$$D = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2 \Big\}$$
e sia F il campo vettoriale
$$F(x,y) = (x^2, y^2).$$
Calcolare
$$\iint_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 10. *Sia D il dominio*
$$D = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2 \Big\}$$
e sia F il campo vettoriale
$$F(x,y) = (xy, x^2 + xy).$$
Calcolare
$$\iint_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 11. *Sia D il dominio*

$$D = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le x^2 \Big\}$$

e sia F il campo vettoriale

$$F(x,y) = (x^2 + y^4, xy).$$

Calcolare

$$\iint_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 12. *Sia D il dominio*

$$D = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le x \Big\}$$

e sia F il campo vettoriale

$$F(x,y) = (x + y, xy).$$

Calcolare

$$\iint_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 13 (Appello giugno 2021)**.** *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{x + 2y}{1 + x^2 + y^2} \, , \ \frac{y + 2x}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

Calcolare l'integrale

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 14 (Appello giugno 2021)**.** *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \Big((x+y)e^{x^2+y^2} \, , \ (x-y)e^{-x^2-y^2} \Big)$$

Calcolare l'integrale

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 15 (Appello luglio 2021)**.** *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left((x+y)e^{x^2+y^2} \, , \ \frac{2y}{e^{x^2+y^2}} \right)$$

Calcolare l'integrale

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 16 (Appello settembre 2021)**.** *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left((x^2 - 2y)e^{x^2+y^2} \, , \ \frac{xy + y}{e^{x^2+y^2}} \right)$$

Calcolare l'integrale

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 17 (Luglio 2020)**.** *Sia B_1 la palla di centro zero e raggio 1 in $\mathbb{R}^2$. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{(1 + x^2 + y^2)^3} \, , \ \frac{2y}{\sqrt{3 + x^2 + y^2}} \right)$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 18 (Giugno 2020)**.** *Sia* B_1 *la palla di centro zero e raggio* 1 *in* $\mathbb{R}^2$*.*
Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \Big(x^3\big(x^2+y^2\big)^2\ ,\ x^2y\,\big(x^2+y^2\big)^3\Big)$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Esercizio 19. *Sia* B_1 *la palla di centro zero e raggio* 1 *in* $\mathbb{R}^2$*.*
Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}\ ,\ \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^3}\right)$$

Calcolare

$$I = \lim_{r\to 0}\iint_{B_1\setminus B_r} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Esercizio 20 (Febbraio 2021)**.** *Sia* B_1 *la palla di centro zero e raggio* 1 *in* $\mathbb{R}^2$*.*
Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \Big(\frac{xy}{1+x^2+y^2}\ ,\ \frac{2y}{1+x^2+y^2}\Big)$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Esercizio 21 (Febbraio 2021)**.** *Sia* B_1 *la palla di centro zero e raggio* 1 *in* $\mathbb{R}^2$*.*
Sia $F : B_1 \to \mathbb{R}^2$ *il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \Big(x^3+xy^2\ ,\ \frac{2y}{\cos(x^2+y^2-1)}\Big)$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Esercizio 22 (Aprile 2021)**.** *Sia* B_1 *la palla di centro zero e raggio* 1 *in* $\mathbb{R}^2$*.*
Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \Big(\frac{2x-y}{1+x^2+y^2}\ ,\ \frac{x+y}{1+x^2+y^2}\Big)$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Esercizio 23 (Aprile 2021)**.** *Sia* B_1 *la palla di centro zero e raggio* 1 *in* $\mathbb{R}^2$*.*
Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \Big(yx^2+y^3\ ,\ \frac{2y}{1+x^2+y^2}\Big)$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Esercizio 24. *Sia* D *l'insieme*

$$D = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0 \le y \le 1-x^2\Big\}.$$

Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \Big(xy(x^2+y)^6\ ,\ x+y\Big)$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Esercizio 25. *Sia D l'insieme*
$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \leq y \leq 1\Big\}.$$
Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale
$$F(x,y) = \Big(y^6(x^2 - y)\,,\ x\Big).$$
Calcolare
$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 26. *Sia D l'insieme*
$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \leq y \leq x\Big\}.$$
Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale
$$F(x,y) = \Big((x^2 - y)^3(x-y)^7\,,\ xy\Big).$$
Calcolare
$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 27. *Sia D l'insieme*
$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\Big\}.$$
Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale
$$F(x,y) = \Big(xy\,,\ y(y-x)x^6\Big).$$
Calcolare
$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 28. *Sia B_1 la palla di centro $(0,0)$ e raggio 1 in $\mathbb{R}^2$. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale*
$$F(x,y) = \Big(x(x^2+y^2)^7\,,\ y(x^2+y^2)^5\Big).$$
Calcolare
$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy.$$