

INTEGRAZIONE SU DOMINI NORMALI. ESERCIZI

Esercizio 1 (Appello giugno 2021). *Consideriamo il dominio*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x - x^2\}.$$

e la funzione

$$F(x, y) = xy.$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D F(x, y) dx dy.$$

Esercizio 2 (Secondo appello giugno 2021). *Consideriamo il dominio d'integrazione*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2x^2 \leq y \leq 2x + x^2\}.$$

e la funzione

$$F(x, y) = xy.$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D F(x, y) dx dy.$$

Esercizio 3 (Appello luglio 2021). *Consideriamo il dominio d'integrazione*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{2x^2 + 1} \leq y \leq x + 1\}.$$

e la funzione

$$F(x, y) = xy.$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D F(x, y) dx dy.$$

Esercizio 4 (Appello settembre 2021). *Consideriamo il dominio d'integrazione*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq \sqrt{2x^2 + 1}\}.$$

e la funzione

$$F(x, y) = 2y.$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_D F(x, y) dx dy.$$

Esercizio 5 (Appello gennaio 2021). *Siano D il dominio*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - |x|\}.$$

ed $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione

$$F(x, y) = y + x^3 y^2$$

Calcolare l'integrale

$$I = \iint_D F(x, y) dx dy.$$

Esercizio 6 (Appello gennaio 2021). *Siano D il dominio*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq x\}.$$

ed $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione

$$F(x, y) = x + y$$

Calcolare l'integrale

$$I = \iint_D F(x, y) dx dy.$$

Esercizio 7 (Appello gennaio 2021). *Calcolare l'area del dominio*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x - x^2\}.$$

Esercizio 8 (Appello gennaio 2021). *Calcolare l'area del dominio*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 3x - x^2\}.$$

Esercizio 9 (Appello 2020). *Sia B_1 la palla di raggio 1 e centro zero in \mathbb{R}^2 . Calcolare l'integrale*

$$I = \int_{B_1} \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

Esercizio 10 (Appello febbraio 2021). *Sia Ω l'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 \leq y \leq x$$

Calcolare

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy.$$

Esercizio 11 (Appello febbraio 2021). *Sia Ω l'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 \leq y \leq 1$$

Calcolare

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy.$$

Esercizio 12 (Appello aprile 2021). *Sia Ω l'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$$

Calcolare

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy$$

Esercizio 13 (Appello aprile 2021). *Sia Ω l'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$$

Calcolare

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy$$

Esercizio 14 (Appello aprile 2021). *Sia Ω l'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$$

Calcolare

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy$$

Esercizio 15 (Appello aprile 2021). *Sia Ω l'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$$

Calcolare

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy$$

Esercizio 16. *Sia Ω l'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x$$

Calcolare

$$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

Esercizio 17. *Sia Ω l'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1$$

Calcolare

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy$$

Esercizio 18. Sia Ω l'insieme

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1$$

Calcolare

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy$$

Esercizio 19. Sia Ω l'insieme

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x$$

Calcolare

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy$$

Esercizio 20. Calcolare

$$\iint_{B_1} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$

Esercizio 21. Calcolare in funzione del parametro $a > 0$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$

Esercizio 22. Sia Ω l'insieme

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + by^2 \leq 1$$

Calcolare in funzione di $a > 0$ e $b > 0$ l'integrale

$$\iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy$$

Esercizio 23. Sia Ω l'insieme

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + by^2 \leq 1$$

Calcolare in funzione di $a > 0$ e $b > 0$ l'integrale

$$\iint_{\Omega} (x + 2y) \, dx \, dy$$

Esercizio 24. Sia Ω l'insieme

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + by^2 \leq 1$$

Calcolare in funzione di $a > 0$ e $b > 0$ l'integrale

$$\iint_{\Omega} x^2 \, dx \, dy$$

Esercizio 25. Sia Ω l'insieme

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + by^2 \leq 1$$

Calcolare in funzione di $a > 0$ e $b > 0$ l'integrale

$$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

Esercizio 26. Sia Ω l'insieme

$$[0, 1] \times [1, 2]$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy$$

Esercizio 27. Sia Ω l'insieme

$$[0, 1] \times [0, 1]$$

Calcolare gli integrali

$$I_1 = \iint_{\Omega} x \, dx \, dy ; \quad I_2 = \iint_{\Omega} xy \, dx \, dy ; \quad I_3 = \iint_{\Omega} x^2 \, dx \, dy .$$

Esercizio 28. Siano Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 gli insiemi

$$\Omega_1 = [0, 1] \times [0, 4] ; \quad \Omega_2 = [0, 2] \times [0, 2] ; \quad \Omega_3 = [0, 4] \times [0, 1] .$$

Calcolare gli integrali

$$I_1 = \iint_{\Omega_1} xy \, dx \, dy ; \quad I_2 = \iint_{\Omega_2} xy \, dx \, dy ; \quad I_3 = \iint_{\Omega_3} xy \, dx \, dy .$$

Esercizio 29. Per ogni numero reale $a > 0$ definiamo l'insieme

$$\Omega_a = [0, a] \times [0, \frac{1}{a}]$$

Calcolare in funzione di a l'integrale

$$I(a) = \iint_{\Omega_a} (x^2 + y^2) dx dy$$

Calcolare $\sup_{a>0} I(a)$ e $\inf_{a>0} I(a)$.

Esercizio 30. Sia D il dominio $D = \overline{B}_2 \setminus B_1$ in \mathbb{R}^2 . Quali delle affermazioni seguenti sono vere ?

(1) $\int_D x^2 = \int_D y^2$

(2) $\int_D xy = \int_D x^2 = \int_D y^2$

(3) $\int_D (x - y)^2 = 2 \int_D x^2$

(4) $\int_D (x - y)^2 = 0$

(5) $\int_D (x + y)^2 = 2 \int_D x^2$

(6) $\int_D (x + y)^2 = 4 \int_D x^2$

(7) $\int_D (x^2 + y^2) = 2 \int_D x^2$

(8) Calcolare $\int_D x^2$.