Funzioni derivabili e derivate parziali

Definizione 1. *Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione data.*

(i) *Diciamo che la funzione f è* **derivabile** *nel punto $X = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega$, se per ogni $i = 1, \dots, d$ esistono le* **derivate parziali**

$$\partial_{x_i} f(X) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_d) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_d)}{h} .$$

Per le derivate parziali di f sono comunemente usate le seguenti notazioni:

$$\partial_{x_i} f = \partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Il vettore con coordinate $\partial_i f(X)$, $i = 1, \dots, d$, è detto **gradiente** *di f nel punto X*

$$\nabla f(X) := \big(\partial_{x_1} f(X), \partial_{x_2} f(X), \dots, \partial_{x_i} f(X), \dots, \partial_{x_d} f(X)\big) \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) *Diciamo che funzione f è derivabile in Ω, se lo è in ogni punto $X \in \Omega$.*

Teorema 2 (Funzioni con gradiente nullo)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e connesso per archi. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile su Ω e tale che*

$$\partial_{x_i} f(X) = 0 \quad \textit{per ogni} \quad X \in \Omega \quad \textit{ed ogni} \quad i = 1, \dots, d,$$

allora f è costante su Ω.

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo che $d = 2$. Sia $X_0 \in \Omega$ un punto fissato. Dimostreremo che

$$f(X) = f(X_0) \quad \text{per ogni} \quad X \in \Omega.$$

Definiamo l'insieme

$$A = \Big\{X \in \Omega \ : \ f(X) = f(X_0)\Big\}.$$

Osserviamo che:

- Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto, allora per ogni punto $X = (x, y) \in \Omega$ esiste un quadrato Q centrato in X e contenuto in Ω:

$$Q := (-\ell + x, \ell + x) \times (-\ell + y, y + \ell) \subset \Omega;$$

- Se $f : Q \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile e con gradiente nullo su un quadrato Q, allora la funzione f è costante su Q.

Di conseguenza, sia A che $\Omega \setminus A$ sono insiemi aperti il che implica che $\Omega \setminus A = \emptyset$. □

Proposizione 3 (Operazioni algebriche con le derivate parziali)**.** *La somma e il prodotto di funzioni derivabili sono funzioni derivabili e valgono le identita seguenti:*

$$\partial_i(f + g) = \partial_i f + \partial_i g \qquad e \qquad \partial_i(fg) = f\,\partial_i g + g\,\partial_i f .$$

Dimostrazione. Segue direttamente dalle formule per le funzioni derivabili di una variabile. □

Gli spazi $C^k(\Omega)$

Definizione 4. *Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione data.*

(i) *Diciamo che la funzione f è di classe C^0 su Ω, e scriviamo $f \in C^0(\Omega)$, o semplicemente $f \in C(\Omega)$, se la funzione f è continua su Ω.*

(ii) *Diciamo che la funzione f è di classe C^1 su Ω, e scriviamo $f \in C^1(\Omega)$, se:*

- *f è derivabile in Ω;*
- *le derivate parziali $\partial_{x_i} f$, $i = 1, \dots, d$, sono funzioni continue su Ω.*

(iii) *Diciamo che la funzione f è di classe C^2 su Ω, e scriviamo $f \in C^2(\Omega)$, se:*

- *la funzione f è derivabile in Ω;*
- *le sue derivate parziali $\partial_{x_i} f$, $i = 1, \dots, d$, sono a loro volta funzioni derivabili su Ω;*
- *le derivate parziali seconde $\partial_{x_j}\big(\partial_{x_i} f\big)$ sono funzioni continue su Ω, per ogni $i = 1, \dots, d$ e $j = 1, \dots, d$.*

Osservazione 5. *Per definizione, se $f \in C^k(\Omega)$, allora le sue derivate parziali sono in $C^{k-1}(\Omega)$.*

Osservazione 6. *In seguito, usando il teorema del differenziale totale, dimostreremo che*

$$f \in C^2(\Omega) \quad \Rightarrow \quad f \in C^1(\Omega) \quad \Rightarrow \quad f \in C^0(\Omega).$$

Un esempio importante

Esempio 7. *In dimensione $d \geq 2$, la sola derivabilità di una funzione fornisce ben poche informazioni sul suo comportamento locale. Infatti,*

esistono funzioni definite su $\mathbb{R}^2$ e derivabili in ogni punto che non sono nemmeno continue!

Per esempio, la funzione

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \textit{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{se} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

è derivabile in ogni punto, zero compreso, ma non è continua in $(0,0)$. Infatti, siccome

$$\begin{cases} F(x,0) = 0 & \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}, \\ F(0,y) = 0 & \textit{per ogni} \quad y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

otteniamo che

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(h,0) - F(0,0)}{h} = 0 \qquad e \qquad \lim_{k\to 0} \frac{F(0,k) - F(0,0)}{k} = 0,$$

e quindi le derivate parziali $\partial_x F(0,0)$ e $\partial_y F(0,0)$ esistono e sono uguali a zero. D'altra parte, se consideriamo la successione

$$X_n = ({}^1\!/\!_n \,,\, {}^1\!/\!_n) \quad \textit{per} \quad n \geq 1,$$

abbiamo che

$$X_n \to (0,0),$$

ma

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{{}^1\!/\!_n \cdot {}^1\!/\!_n}{({}^1\!/\!_n)^2 + ({}^1\!/\!_n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

che è diverso da $F(0,0) = 0$. La funzione F quindi non è continua in $(0,0)$.