Teorema della funzione implicita

Teorema della funzione implicita

Teorema 1 (Teorema di Dini)**.** *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^2$ *che contiene l'origine* $(0,0)$ *e sia* $F:\Omega\to\mathbb{R}$ *una funzione di classe* $C^1(\Omega)$ *tale che*

$$F(0,0)=0 \qquad e \qquad \partial_x F(0,0)\neq 0.$$

Allora esistono due costanti $\varepsilon_0>0$*,* $\delta_0>0$ *ed una funzione*

$$\eta:[-\delta_0,\delta_0]\to\mathbb{R}$$

tali che:

(i) $-\varepsilon_0<\eta(t)<\varepsilon_0$ *per ogni* $t\in[-\delta_0,\delta_0]$*;*

(ii) *il grafico di* η *coincide con l'insieme di livello*

$$\mathcal{N}_F=\Big\{(x,y)\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\times[-\delta_0,\delta_0]\ :\ F(x,y)=0\Big\},$$

ovvero, per ogni $(x,y)\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\times[-\delta_0,\delta_0]$*, vale che*

$$F(x,y)=0 \quad \textit{se e solo se} \quad x=\eta(y);$$

(iii) η *è continua su* $[-\delta_0,\delta_0]$ *e* $\eta(0)=0$*;*

(iv) η *è di classe* C^1 *su* $(-\delta_0,\delta_0)$*.*

Lemma 2 (Continuità di η)**.** *Sia* $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *una funzione continua. Supponiamo che*

$$\eta:[-\delta_0,\delta_0]\to\mathbb{R}$$

sia una funzione con la proprietà seguente. Esiste $\varepsilon_0>0$ *tale che:*

(i) $-\varepsilon_0\le\eta(t)\le\varepsilon_0$ *per ogni* $t\in[-\delta_0,\delta_0]$*;*

(ii) *per ogni* $(x,y)\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\times[-\delta_0,\delta_0]$*, vale che*

$$F(x,y)=0 \quad \textit{se e solo se} \quad x=\eta(y);$$

Allora, η *è continua su* $[-\delta_0,\delta_0]$*.*

Dimostrazione: Sia $y_n\in[-\delta_0,\delta_0]$ una successione convergente ad un certo $y_\infty\in[-\delta_0,\delta_0]$. Definiamo

$$x_n=\eta(y_n)$$

e supponiamo per assurdo che x_n non converge a $\eta(y_\infty)$. Esistono allora $c>0$ e una sottosuccessione x_{n_k} tali che

$$|x_{n_k}-\eta(y_\infty)|\ge c \quad \text{per ogni} \quad k>0.$$

Per la proprietà (i), la successione x_{n_k} è limitata e quindi esiste una sottosuccessione $x_{n_{k_j}}$ convergente ad un certo $x_\infty\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$. Siccome F è continua, abbiamo che

$$0=F(x_{n_{k_j}},y_{n_{k_j}})\to F(x_\infty,y_\infty),$$

e quindi

$$F(x_\infty,y_\infty)=0.$$

Ma allora, per (ii),

$$x_\infty=\eta(y_\infty).$$

□

Lemma 3 (Derivabilità di η)**.** *Sia $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Supponiamo che*

$$\eta:(a,b)\to\mathbb{R}$$

sia una funzione continua tale che

$$F\big(\eta(t),t\big)=\textit{costante}\qquad \textit{per ogni}\qquad t\in(a,b),$$

$$\textit{e}\qquad \partial_x F\big(\eta(t),t\big)>0\qquad \textit{per ogni}\qquad t\in(a,b).$$

Allora, η è derivabile su (a,b), la sua derivata è continua su (a,b) e

$$\eta'(t)\,\partial_x F\big(\eta(t),t\big)+\partial_y F\big(\eta(t),t\big)=0\qquad \textit{per ogni}\qquad t\in(a,b).$$

Dimostrazione: Sia $t\in(a,b)$ e sia s abbastanza piccolo. Allora

$$\begin{aligned}
0&=F\big(\eta(t+s),t+s\big)-F\big(\eta(t),t\big)\\
&=F\big(\eta(t+s),t+s\big)-F\big(\eta(t),t+s\big)\\
&\qquad+F\big(\eta(t),t+s\big)-F\big(\eta(t),t\big)\\
&=\Big(\eta(t+s)-\eta(t)\Big)\partial_x F\big(\kappa(t,s),t+s\big)+s\,\partial_y F\big(\eta(t),h(t,s)\big),
\end{aligned}$$

dove $\kappa(t,s)$ sta tra $\eta(t+s)$ e $\eta(t)$, e $h(t,s)$ è compreso tra $t+s$ e t. Dividento tutto per s abbiamo

$$\frac{\eta(t+s)-\eta(t)}{s}=-\frac{\partial_y F\big(\eta(t),h(t,s)\big)}{\partial_x F\big(\kappa(t,s),t+s\big)}.$$

Passando al limite per $s\to0$, abbiamo la tesi. $\square$

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Teorema 4 (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e siano $F:\Omega\to\mathbb{R}$ e $G:\Omega\to\mathbb{R}$ due funzioni di classe $C^1(\Omega)$. Sia $\mathcal{N}_G$ l'insieme*

$$\mathcal{N}_G=\Big\{X\in\Omega:\ G(X)=0\Big\}.$$

Se $X_0\in\mathcal{N}_G$ è un punto di massimo (o minimo) relativo per la funzione F su $\mathcal{N}_G$, allora è vera una delle affermazioni seguenti :

(a) $\nabla G(X_0)=0$;

(b) *esiste $\lambda\in\mathbb{R}$ tale che $\nabla F(X_0)-\lambda\nabla G(X_0)=0$.*

Dimostrazione in dimensione due. Sia $X_0=(x_0,y_0)$. Supponiamo che $\nabla G(x_0,y_0)\neq0$. Allora,

$$\partial_x G(x_0,y_0)\neq0\qquad\text{oppure}\qquad \partial_y G(x_0,y_0)\neq0.$$

Senza perdita di generalità, possiamo supporre che $\partial_x G(x_0,y_0)\neq0$. Per il teorema della funzione implicita, esistono $\varepsilon>0$, $\delta>0$ ed una funzione

$$\eta:\big(y_0-\delta,y_0+\delta\big)\to\big(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon\big),$$

tale che dato un punto

$$(x,y)\in\big(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon\big)\times\big(y_0-\delta,y_0+\delta\big),$$

si ha che

$$G(x,y)=0\qquad\text{se e solo se}\qquad x=\eta(y).$$

Ora, siccome $F:\mathcal{N}_G\to\mathbb{R}$ ha un minimo relativo in (x_0,y_0), abbiamo che la funzione

$$y\mapsto F\big(\eta(y),y\big)$$

ha un minimo relativo in y_0. Di conseguenza,

$$\begin{aligned}0=\frac{d}{dy}\Big|_{y=y_0}F\big(\eta(y),y\big)&=\eta'(y_0)\,\partial_x F\big(\eta(y_0),y_0\big)+\partial_y F\big(\eta(y_0),y_0\big)\\&=\eta'(y_0)\,\partial_x F\big(x_0,y_0\big)+\partial_y F\big(x_0,y_0\big)\\&=-\frac{\partial_y G\big(x_0,y_0\big)}{\partial_x G\big(x_0,y_0\big)}\,\partial_x F\big(x_0,y_0\big)+\partial_y F\big(x_0,y_0\big).\end{aligned}\qquad(*)$$

Cerchiamo λ tale che

$$\begin{cases}\partial_x F(x_0,y_0)=\lambda\,\partial_x G(x_0,y_0)\\ \partial_y F(x_0,y_0)=\lambda\,\partial_y G(x_0,y_0).\end{cases}$$

Scegliamo

$$\lambda:=\frac{\partial_x F(x_0,y_0)}{\partial_x G(x_0,y_0)}.$$

In questo modo, la prima uguaglianza è automaticamente soddisfatta; la seconda segue da $(*)$. $\square$

Esercizio 5. *Per ogni $a>0$ ed ogni $b>0$, consideriamo il rettangolo $\mathcal{R}_{ab}=[0,a]\times[0,b]$. Il perimetro e l'area di $\mathcal{R}_{ab}$ sono dati rispettivamente da*

$$\mathrm{Per}\,(\mathcal{R}_{ab})=2a+2b\qquad e\qquad \mathrm{Area}\,(\mathcal{R}_{ab})=ab\,.$$

Sia $P>0$. Fra tutti i rettangoli di perimetro P trovare quello con area più grande.

Esercizio 6. *Trovare il massimo ed il minimo della funzione F sull'insieme D.*

(1) $F(x,y)=x^3-xy^2-x+1$; $\quad D=\big\{(x,y)\,:\,x^2+y^2=1\big\}$;

(2) $F(x,y)=x^2+2y^2-xy$; $\quad D=\big\{(x,y)\,:\,x^2+y^2=1\big\}$;

(3) $F(x,y)=x^3-y^3$; $\quad D=\big\{(x,y)\,:\,x^2+2y^2=1\big\}$;

(4) $F(x,y)=x^3-xy^2$; $\quad D=\big\{(x,y)\,:\,2x^2+y^2=1\big\}$;

(5) $F(x,y)=xy$; $\quad D=\big\{(x,y)\,:\,x^2+2y^2=1\big\}$;

(6) $F(x,y)=x^2+xy$; $\quad D=\big\{(x,y)\,:\,x^2+2y^2=1\big\}$;

(7) $F(x,y)=x^2+xy$; $\quad D=\big\{(x,y)\,:\,x^2+2y^2=1\big\}$.

Esercizio 7. *Trovare il massimo ed il minimo della funzione F sulla sfera*

$$\partial B_1=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;:\;x^2+y^2+z^2=1\Big\}.$$

(1) $F(x,y,z)=x+y+z$;

(2) $F(x,y,z)=xyz$;

(3) $F(x,y,z)=xy+yz+zx$;

(4) $F(x,y,z)=xy$;

(5) $F(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.