Lo spazio duale di uno spazio di Banach

Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach. Diciamo che $T : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare continuo, se

- T è lineare, ovvero:
$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g),$$
per ogni $f, g \in \mathcal{B}$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- T è continuo, ovvero:
$$f_n \to f \quad \text{in} \quad \mathcal{B} \qquad \Rightarrow \qquad T(f_n) \to T(f) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}\,.$$

È noto il seguente teorema:

Teorema 1. *Sia $T : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare sullo spazio di Banach $\mathcal{B}$. Allora, sono equivalenti:*

(i) *T è continuo;*

(ii) *T è limitato, ovvero:*
$$\|T\| := \sup\Big\{T(f) \ : \ f \in \mathcal{B}\,,\ \|f\|_{\mathcal{B}} \le 1\Big\} < +\infty\,.$$

Dimostriamo il teorema seguente:

Teorema 2. *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach. Consideriamo l'insieme $\mathcal{B}'$ di tutti gli operatori lineari continui su $\mathcal{B}$. Inoltre, per ogni $T \in \mathcal{B}'$, definiamo*
$$\|T\|_{\mathcal{B}'} := \sup\Big\{T(f) \ : \ f \in \mathcal{B}\,,\ \|f\|_{\mathcal{B}} \le 1\Big\}\,.$$
Allora, $(\mathcal{B}', \|\cdot\|_{\mathcal{B}'})$ è uno spazio di Banach.

Dimostrazione.
Step 1. $\mathcal{B}'$ è uno spazio vettoriale.
Step 2. $\|\cdot\|_{\mathcal{B}'}$ è una norma su $\mathcal{B}'$.
Step 3. $(\mathcal{B}', \|\cdot\|_{\mathcal{B}'})$ è completo. Per dimostrare Step 3 consideriamo una successione di Cauchy T_n in $\mathcal{B}'$. Per definizione, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \ge 0$ tale che
$$\|T_n - T_m\|_{\mathcal{B}'} \le \varepsilon \qquad \text{per ogni} \qquad n, m \ge N\,.$$
In particolare, per ogni $x \in \mathcal{B}$, abbiamo che
$$|T_n(x) - T_m(x)| \le \|T_n - T_m\|_{\mathcal{B}'}|x| \le \varepsilon|x|.$$
Quindi anche $T_n(x)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$. Definiamo la mappa
$$T : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$$
come
$$T(x) := \lim_{n\to+\infty} T_n(x).$$
Allora:

- T è lineare.

- T è limitata. Infatti:
$$|T(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{B}'}|x| = L|x|.$$
Osserviamo che il limite
$$L = \lim_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{B}'}$$
esiste ed è finito.Infatti, siccome
$$\Big| \|T_n\|_{\mathcal{B}'} - \|T_m\|_{\mathcal{B}'} \Big| \leq \|T_n - T_m\|_{\mathcal{B}'},$$
si ha che la successione delle norme $\|T_n\|_{\mathcal{B}'}$ è di Cauchy.

- $\|T_n - T\|_{\mathcal{B}'} \to 0$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo $N \geq 1$ in modo tale che
$$\|T_n - T_m\|_{\mathcal{B}'} \leq \varepsilon \qquad \text{per ogni} \qquad n, m \geq N\,.$$
Quindi, per ogni $x \in \mathcal{B}$ ed ogni $m \geq n \geq N$, abbiamo
$$|T_n(x) - T(x)| \leq |T(x) - T_m(x)| + |T_n(x) - T_m(x)| \leq |T(x) - T_m(x)| + \varepsilon|x|.$$
Mandando $m \to \infty$, otteniamo che per ogni $x \in \mathcal{B}$ ed ogni $n \geq N$ si ha:
$$|T_n(x) - T(x)| \leq \varepsilon|x|,$$
ovvero
$$\|T_n - T\|_{\mathcal{B}'} \leq \varepsilon \qquad \text{per ogni} \qquad n \geq N.$$

$\square$

Osservazione 3. *Osserviamo che il duale $\mathcal{B}''$ del duale $\mathcal{B}'$ di uno spazio di Banach $\mathcal{B}$ contiene $\mathcal{B}$ stesso. Uno spazio si dice riflessivo se*
$$\mathcal{B}'' = \mathcal{B}.$$
Gli spazi $L^p(\Omega)$, per $p \in (1, +\infty)$, sono riflessivi.