Principio dell'uniforme limitatezza

Teorema 1 (Banach-Steinhaus). *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach. Sia $T_n : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ una successione di operatori lineari continui su $\mathcal{B}$ con la proprietà seguente:*

Per ogni $x \in \mathcal{B}$, la successione $T_n(x)$ è limitata.

Allora, la successione di norme

$$\|T_n\|_{\mathcal{B}'} := \sup\Big\{T_n(b) \ : \ b \in \mathcal{B}\,,\ \|b\|_{\mathcal{B}} = 1\Big\},$$

è limitata.

Teorema della categoria di Baire

Teorema 2. *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach. Sia C_n una successione di sottoinsiemi chiusi di $\mathcal{B}$ tali che:*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n\geq 1} C_n.$$

Allora, almeno uno fra gli insiemi C_n ha parte interna non-vuota.

Dimostrazione: Supponiamo, per assurdo, che tutti gli insiemi C_n hanno parte interna vuota. Siccome $C_1 \neq \mathcal{B}$, esiste una palla $B_{r_1}(x_1)$ in $\mathcal{B}$ tale che:

$$B_{r_1}(x_1) \cap C_1 = \emptyset\,.$$

Siccome C_2 ha parte interna vuota,

$$B_{r_1}(x_1) \setminus C_2 \neq \emptyset.$$

Esiste quindi una palla $B_{r_2}(x_2) \subset B_{r_1}(x_1)$ tale che

$$B_{r_2}(x_2) \cap C_2 = \emptyset \qquad \text{e} \qquad |x_2 - x_1| \leq \frac{1}{2}.$$

Seguendo questa procedura, possiamo costrure una successione di palle

$$B_{r_n}(x_n)$$

tale che:

- $\overline{B}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{r_n}(x_n)\,;$
- $|x_{n+1} - x_n| \leq 2^{-n}\,;$
- $B_{r_n}(x_n) \cap \Big(C_n \cup C_{n-1} \cup \dots \cup C_1\Big) = \emptyset.$

Per costruzione x_n è di Cauchy e quindi converge ad un certo $x \in \mathcal{B}$. Inoltre, di nuovo per costruzione

$$x \in \bigcap_{n\geq 1} \overline{B}_{r_n}(x_n)\,,$$

e di conseguenza $x \notin \bigcup_{n\geq 1} C_n$. □

Una generalizzazione (immediata) del teorema precedente è la seguente:

Teorema 3. *Sia X uno spazio metrico completo. Sia C_n una successione di sottoinsiemi chiusi di X tali che:*

$$X = \bigcup_{n\geq 1} C_n.$$

Allora, almeno uno fra gli insiemi C_n ha parte interna non-vuota.

Dimostrazione di Teorema 4

Consideriamo la successione di insiemi

$$C_n := \Big\{ x \in \mathcal{B} \ : \ |T_k(x)| \le n \quad \text{per ogni} \quad k \ge 1 \Big\}.$$

Osserviamo che gli insiemi C_n sono chiusi e che per ipotesi

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \ge 1} C_n .$$

Quindi, per Teorema 2, uno degli insiemi C_n ha parte interna non-vuota. Esiste quindi una palla

$$\overline{B}_r(x) \subset C_n .$$

Per ogni $b \in \mathcal{B}$, con $\|b\|_{\mathcal{B}} = 1$, abbiamo che

$$x + rb \in \overline{B}_r(x).$$

Quindi, per ogni operatore T_k,

$$\begin{aligned} |T_k(b)| &= \frac{1}{r}|T_k(rb)| \\ &\le \frac{1}{r}|T_k(x+rb) - T_k(x)| \\ &\le \frac{1}{r}|T_k(x+rb)| + \frac{1}{r}|T_k(x)| \\ &\le \frac{n}{r} + \frac{1}{r}|T_k(x)|. \end{aligned}$$

Ora, siccome $|T_k(x)|$ è una successione limitata, esiste una costante $C_x > 0$ (che dipende da x) tale che

$$|T_k(x)| \le C_x \qquad \text{per ogni} \qquad k \ge 1.$$

Quindi, per ogni $b \in \mathcal{B}$, con $\|b\|_{\mathcal{B}} = 1$, abbiamo:

$$|T_k(b)| \le \frac{n}{r} + \frac{C_x}{r}.$$

Siccome questa stima non dipende da k e da b, abbiamo la tesi. □

Una versione più generale di Teorema 4

Teorema 4 (Banach-Steinhaus)**.** *Siano X e Y due spazi di Banach. Sia $T_n : X \to Y$ una successione di operatori lineari con la proprietà seguente:*

Per ogni $x \in X$, la successione $T_n(x)$ è limitata in Y.

Allora, la successione di norme

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup \Big\{ \|T_n(x)\|_Y \ : \ x \in X \,,\ \|x\|_X = 1 \Big\},$$

è limitata.