Disuguaglianza di Poincaré

Teorema 1. *Dato un intervallo aperto e limitato $I \subset \mathbb{R}$, abbiamo che*

$$\int_I u^2\,dx \le \frac{1}{\pi^2}|I|^2\int_I (u')^2\,dx \qquad \textit{per ogni} \qquad u \in H^1_0(I)\,.$$

Inoltre, se $C \in \mathbb{R}$ è una costante tale che

$$\int_I u^2\,dx \le C|I|^2\int_I (u')^2\,dx \qquad \textit{per ogni} \qquad u \in H^1_0(I)\,,$$

allora

$$C \ge \frac{1}{\pi^2}.$$

Riduzione al caso $|I| = 1$.

Sia $I = [0, L]$ un intervallo e $u \in H^1_0(I)$. Per ogni $r > 0$ definiamo l'intervallo

$$I_r = [0, rL]$$

e la funzione

$$u_r(x) := u(x/r).$$

Allora, $u_r \in H^1_0(I_r)$,

$$\int_{I_r} u_r^2\,dx = r\int_I u^2\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_{I_r} (u_r')^2\,dx = \frac{1}{r}\int_I (u')^2\,dx\,.$$

In particolare, data una costante $C > 0$,

$$\int_{I_r} u_r^2\,dx \le C|I_r|^2\int_{I_r} (u_r')^2\,dx \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_I u^2\,dx \le C|I|^2\int_I (u')^2\,dx\,.$$

Quindi, in Teorema 1, possiamo suppore che $I = (0, 1)$.

Il problema variazionale

Prendiamo $I = (0, 1)$ e definiamo

$$\lambda := \inf\left\{\int_I (u')^2\,dx \ : \ u \in H^1_0(I)\,,\ \int_I u^2\,dx = 1\right\}.$$

Lemma 2. *Esiste $u \in H^1_0(I)$ tale che*

$$\int_I u^2\,dx = 1 \qquad e \qquad \int_I (u')^2\,dx = \lambda\,.$$

Dimostrazione. Sia $u_n \in H^1_0(I)$ una successione tale che

$$\int_I u_n^2\,dx = 1 \quad \text{per ogni} \quad n \ge 1\,;$$

$$\int_I (u_n')^2\,dx \quad \text{è decrescente e} \quad \lim_{n\to\infty}\int_I (u_n')^2\,dx = \lambda\,.$$

Siccome u_n è limitata in $H^1_0(I)$, esistono una funzione $u \in H^1_0(I)$ ed una sottosuccessione u_{n_k} tali che:

- u_{n_k} converge debolmente a u in $H^1_0(I)$;
- u_{n_k} converge a u fortemente in $L^\infty(I)$.

In particolare, abbiamo che

$$\int_I (u')^2\,dx \le \liminf_{k\to\infty} \int_I (u'_{n_k})^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_I (u'_n)^2\,dx = \lambda\,;$$

$$\int_I u^2\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_I u^2_{n_k}\,dx = 1\,.$$

D'altra parte, per la definizione di λ,

$$\lambda \le \int_I (u')^2\,dx\,.$$

Quindi, in conclusione,

$$\lambda = \int_I (u')^2\,dx\,.$$

□

Lemma 3. *Se $u \in H^1_0(I)$, con $I = (0,1)$, è una funzione tale che*

$$\int_I u^2\,dx = 1 \qquad e \qquad \int_I (u')^2\,dx = \lambda\,,$$

allora:

(i) *u è soluzione debole di*

$$-u'' = \lambda u \quad in \quad I\,, \qquad u \in H^1_0(I)\,;$$

(ii) *$u \in C^\infty(I) \cap C_0(I)$;*

(iii) *u ha segno costante in I;*

(iv) *$u(x) = c\sin(\pi x)$, per una qualche costante $c \in \mathbb{R}$, e $\lambda = \pi^2$.*

Dimostrazione. **Dimostriamo (i).** Data una funzione $\varphi \in H^1_0(I)$, consideriamo la funzione reale (definita per $t \in \mathbb{R}$ abbastanza piccolo)

$$f(t) = \frac{\int_I (u' + t\varphi')^2\,dx}{\int_I (u + t\varphi)^2\,dx}\,.$$

Siccome f ha un minimo in $t = 0$, abbiamo che

$$\int_I u'\varphi'\,dx - \lambda \int_I u\varphi\,dx = f'(0) = 0\,.$$

Quindi, u è soluzione debole di

$$-u'' = \lambda u \quad \text{in} \quad I\,, \qquad u \in H^1_0(I)\,.$$

Dimostriamo (ii). Siccome

$$\int_I u'\varphi'\,dx = -\int_I (-\lambda u)\varphi\,dx \quad \text{per ogni} \quad \varphi \in C^1_c(I)\,,$$

otteniamo che $u' \in H^1(I)$ e che la sua derivata debole sia

$$u'' = -\lambda u.$$

Quindi, per ogni $x \in (0,1)$, abbiamo:

$$(A) \quad u'(x) = u'(0) - \lambda \int_0^x u(t)\,dt\,; \qquad (B) \quad u(x) = \int_0^x u'(t)\,dt\,.$$

Ora, siccome $u \in H^1_0(I)$, abbiamo che u è continua su $[0,1]$. Quindi, per (A), u' è derivabile su $[0,1]$ e la sua derivata $u'' = -\lambda u$ è continua. Per (B), $u \in C^2([0,1])$. Per (A), $u \in C^3([0,1])$. Iterando questo argomento (detto *bootstrap*), otteniamo $u \in C^\infty([0,1])$.

Dimostriamo (iii). Consideriamo la funzione

$$v := |u|.$$

Allora, $v \in H^1_0(I)$ e la sua derivata debole è data da

$$v' = \mathbb{1}_{\{u>0\}} u' - \mathbb{1}_{\{u<0\}} u' \,.$$

In particolare,

$$\int_I v^2\,dx = \int_I u^2\,dx = 1 \qquad \text{e} \qquad \int_I (v')^2\,dx = \int_I (u')^2\,dx = \lambda\,.$$

Quindi, per il punto precedente, anche $v \in C^\infty([0,1])$. Usando che

$$v'' = -\lambda v \le 0 \quad \text{in} \quad I\,,$$

abbiamo che v è concava su $I = [0,1]$. Siccome v si annulla negli estremi dell'intervalloi (ma non è identicamente nulla in I), abbiamo che

$$v > 0 \quad \text{in} \quad I = (0,1).$$

Dimostriamo (iv). Definiamo la funzione

$$\varphi(x) = \sin\big(\sqrt{\lambda}x\big).$$

Allora,

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{e} \quad -\varphi''(x) = \lambda\varphi(x).$$

Sull'intervallo

$$\widetilde{I} := (0,1) \cap (0, \pi/\sqrt{\lambda})$$

consideriamo la funzione

$$F(x) := u'(x)\varphi(x) - u(x)\varphi'(x)$$

e calcoliamo

$$\begin{aligned} F'(x) &= \Big(u'(x)\varphi(x) - u(x)\varphi'(x)\Big)' \\ &= u''(x)\varphi(x) - u(x)\varphi''(x) = -\lambda u(x)\varphi(x) + u\lambda\varphi(x) = 0. \end{aligned}$$

Quindi

$$F \equiv \text{costante} \qquad \text{su} \qquad \widetilde{I}.$$

Siccome F è continua sulla chiusura di $\widetilde{I}$ e $F(0) = 0$, abbiamo che

$$u'\varphi - u\varphi' \equiv 0 \qquad \text{su} \qquad \widetilde{I}.$$

Di conseguenza,

$$\left(\frac{u}{\varphi}\right)' = \frac{u'\varphi - u\varphi'}{\varphi^2} = 0 \qquad \text{su} \qquad \widetilde{I},$$

ovvero esiste una costante $c \neq 0$ tale che

$$u = c\varphi \qquad \text{su} \qquad \widetilde{I}.$$

Ora, siccome u non si annulla mai in I, abbiamo che

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \ge 1.$$

D'altra parte, non è possibile che

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} > 1,$$

perché altrimenti $u(1) = c\phi(1)$ non sarebbe zero. Quindi, necessariamente

$$\pi = \sqrt{\lambda}.$$

$\square$