Serie di Fourier e spazi di Sobolev

Due basi di Fourier in $L^2(I)$

Dato $\ell > 0$, consideriamo il seguente intervallo aperto e limitato:

$$I := (0, \ell).$$

Per ogni $k \geq 1$ definiamo la funzione

$$\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\Big(\frac{\pi}{\ell} kx\Big).$$

Quindi, per ogni $i \geq j \geq 1$,

$$\int_I \phi_i(x)\phi_j(x)\,dx = \delta_{ij}\,.$$

Proposizione 1. *La famiglia di funzioni*

$$\Phi = \Big\{\phi_i \ : \ i \geq 1\Big\}.$$

è un sistema completo ortonormale nello spazio di Hilbert $L^2(I)$. In particolare, data una qualsiasi funzione $u \in L^2(I)$, abbiamo che

$$\|u\|^2_{L^2(I)} = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j^2 \qquad e \qquad u = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j\phi_j\,,$$

dove la seconda serie converge fortemente in $L^2(I)$ e dove

$$c_j := \int_I u(x)\phi_j(x)\,dx\,.$$

Consideriamo ora le funzioni

$$\psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos\Big(\frac{\pi}{\ell} kx\Big) \qquad \text{per ogni} \qquad k \geq 1,$$

e la funzione

$$\psi_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{\ell}}\,.$$

Di nuovo, abbiamo che

$$\int_I \psi_i(x)\psi_j(x)\,dx = \delta_{ij} \qquad \text{per ogni} \qquad 0 \leq i \leq j\,.$$

Proposizione 2. *L'insieme*

$$\Psi := \Big\{\psi_i \ : \ i \geq 0\Big\}.$$

è un sistema completo ortonormale nello spazio di Hilbert $L^2(I)$. In particolare, data una qualsiasi funzione $v \in L^2(I)$, abbiamo che

$$\|v\|^2_{L^2(I)} = \sum_{j=1}^{+\infty} d_j^2 \qquad e \qquad v = \sum_{j=1}^{+\infty} d_j\psi_j\,,$$

dove la seconda serie converge fortemente in $L^2(I)$ e dove

$$d_j := \int_I v(x)\psi_j(x)\,dx\,.$$

Due basi di Fourier su $L^2(I)$

Teorema 3. *Siano $I = (0, \ell)$ un intervallo aperto e limitato in $\mathbb{R}$ e $u \in L^2(I)$. Scriviamo u nella forma*

$$u(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \phi_k(x) \qquad \textit{dove} \qquad c_k := \int_I u(x)\phi_k(x)\,dx\,.$$

Allora, sono equivalenti:

(1) $u \in H_0^1(I)$;

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 < +\infty\,.$

Inoltre, se u' è la derivata debole di u, si ha

$$\|u'\|^2_{L^2(I)} = \frac{\pi^2}{\ell^2}\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 c_k^2 \qquad \text{e} \qquad u'(x) = \frac{\pi}{\ell}\sum_{k=1}^{+\infty} k c_k \psi_k(x)\,,$$

dove la seconda serie converge fortemente in $L^2(I)$.

Dimostrazione. Definiamo

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(x).$$

Allora $S_n \in H_0^1(I)$ e

$$S_n'(x) = \frac{\pi}{\ell}\sum_{k=1}^{n} k c_k \psi_k(x).$$

Dimostriamo prima che (2) implica (1). Abbiamo che

$$\|S_n - S_m\|^2_{L^2} = \sum_{k=m+1}^{n} c_k^2 \qquad \text{e} \qquad \|S_n' - S_m'\|^2_{L^2} = \frac{\pi^2}{\ell^2}\sum_{k=m+1}^{n} k^2 c_k^2.$$

Quindi, la convergenza delle serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\,,$$

implica che esistono i limiti (forti in $L^2(I)$)

$$u := \lim_{n\to+\infty} S_n \qquad \text{e} \qquad v := \lim_{n\to+\infty} S_n'.$$

Quindi, $u \in H_0^1(I)$ e la sua derivata debole è v.

Dimostriamo ora che (1) implica (2). Scriviamo la derivata debole $u' \in L^2(I)$ nella base $\{\psi_k\}_{k\geq 0}$

$$\psi_0 \equiv \sqrt{\frac{1}{\ell}} \qquad \text{e} \qquad \psi_k(x) := \sqrt{\frac{2}{\ell}}\cos\Big(\frac{\pi}{\ell}kx\Big) \quad \text{per} \quad k \geq 1\,,$$

Quindi:

$$u' = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k \psi_k(x) \qquad \text{e} \qquad \|u'\|^2_{L^2(I)} = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k^2\,,$$

dove

$$d_k := \int_0^\ell u'(x)\psi_k(x)\,dx\,.$$

Inolte, siccome

$$0 = u(\ell) - u(0) = \int_0^\ell u'(x)\,dx\,,$$

abbiamo che

$$d_0 = \int_0^\ell u'(x)\psi_0(x)\,dx = 0,$$

e quindi

$$u'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k\psi_k(x) \qquad \text{e} \qquad \|u'\|^2_{L^2(I)} = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k^2\,.$$

Ora, siccome

$$d_k = \int_0^\ell u'(x)\psi_k(x)\,dx = -\int_0^\ell u(x)\psi_k'(x)\,dx = \frac{\pi}{\ell}\,k\int_0^\ell u(x)\phi_k(x)\,dx = \frac{\pi}{\ell}\,k\,c_k\,,$$

abbiamo la tesi. □

Teorema 4. *Siano $I = (0,\ell)$ un intervallo aperto e limitato in $\mathbb{R}$ e $u \in L^2(I)$. Scriviamo u nella forma*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k\psi_k(x) \qquad \textit{dove} \qquad d_k := \int_I u(x)\psi_k(x)\,dx\,.$$

Allora, sono equivalenti:

(1) $u \in H^1(I)$;

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 d_k^2 < +\infty\,.$

Inoltre, se u' è la derivata debole di u, si ha:

$$\|u'\|^2_{L^2(I)} = \frac{\pi^2}{\ell^2}\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 d_k^2 \qquad \textit{e} \qquad u'(x) = -\frac{\pi}{\ell}\sum_{k=1}^{+\infty} k d_k\phi_k(x)\,,$$

dove la seconda serie converge fortemente in $L^2(I)$.

Esempio 5. *Consideriamo l'intervallo $I = (0,\pi)$ e sviluppiamo la funzione*

$$\phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\,\sin\Big(\frac{\pi}{\ell}x\Big)\,,$$

nella base $\{\psi_k\}_{k\geq 1}$. Allora,

$$\phi_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k\psi_k(x)\,,$$

dove

$$\begin{aligned}
d_k &:= \int_0^\ell \psi_k(x)\phi_1(x)\,dx \\
&= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \cos\Big(\frac{\pi}{\ell}kx\Big)\sin\Big(\frac{\pi}{\ell}x\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \bigg(\sin\Big(\frac{\pi}{\ell}(k+1)x\Big) - \sin\Big(\frac{\pi}{\ell}(k-1)x\Big)\bigg)\,dx \\
&= \frac{1}{\ell}\bigg[-\frac{\ell}{\pi}\frac{1}{k+1}\cos\Big(\frac{\pi}{\ell}(k+1)x\Big) + \frac{\ell}{\pi}\frac{1}{k-1}\cos\Big(\frac{\pi}{\ell}(k-1)x\Big)\bigg]_{x=0}^{\ell} \\
&= \frac{1}{\pi}\bigg[-\frac{1}{k+1}\cos\Big((k+1)x\Big) + \frac{1}{k-1}\cos\Big((k-1)x\Big)\bigg]_{x=0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{4}{k^2-1}\delta_k\,,
\end{aligned}$$

dove

$$\delta_k := \begin{cases} 0\,, & \textit{se } k \textit{ è pari};\\ 1\,, & \textit{se } k \textit{ è dispari}. \end{cases}$$

In particolare,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 d_k^2 < +\infty\,,$$

ed infatti $\phi_1 \in H^1(I)$.

Esempio 6. *Consideriamo l'intervallo* $I = (0, \pi)$ *e sviluppiamo la funzione*

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\,\sin\Big(\frac{\pi}{\ell}x\Big)\,,$$

nella base $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$. *Allora,*

$$\psi_1(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \phi_k(x)\,,$$

dove

$$\begin{aligned} c_k :&= \int_0^\ell \psi_1(x)\phi_k(x)\,dx \\ &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \sin\Big(\frac{\pi}{\ell}kx\Big)\cos\Big(\frac{\pi}{\ell}x\Big)\,dx \\ &= \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \Big(\sin\Big(\frac{\pi}{\ell}(k+1)x\Big) + \sin\Big(\frac{\pi}{\ell}(k-1)x\Big)\Big)\,dx \\ &= \frac{1}{\ell}\Big[-\frac{\ell}{\pi}\frac{1}{k+1}\cos\Big(\frac{\pi}{\ell}(k+1)x\Big) - \frac{\ell}{\pi}\frac{1}{k-1}\cos\Big(\frac{\pi}{\ell}(k-1)x\Big)\Big]_{x=0}^{\ell} \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{1}{k+1}\cos\Big((k+1)x\Big) - \frac{1}{k-1}\cos\Big((k-1)x\Big)\Big]_{x=0}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{4k}{k^2-1}\delta_k\,, \end{aligned}$$

dove

$$\delta_k := \begin{cases} 0\,, & \textit{se } k \textit{ è dispari};\\ 1\,, & \textit{se } k \textit{ è pari}. \end{cases}$$

In particolare,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 d_k^2 = +\infty\,,$$

ed infatti $\psi_1 \notin H_0^1(I)$.