Lo spazio $W^{1,p}(I)$

$W^{1,p}(I)$ è uno spazio vettoriale

Date due funzioni $u, v \in W^{1,p}(I)$, e due numeri reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, abbiamo che

$$\alpha u + \beta v \in W^{1,p}(I) \qquad \text{e} \qquad \alpha u' + \beta v' = (\alpha u + \beta v)'.$$

Infatti, siccome $\alpha u' + \beta v' \in L^p(I)$ e $\alpha u + \beta v \in L^p(I)$, basta verificare che per ogni $\phi \in C_c^1(I)$ si ha:

$$\begin{aligned}\int_I \Big(\alpha u + \beta v\Big)\phi'\,dx &= \alpha \int_I u\phi'\,dx + \beta \int_I v\phi'\,dx \\ &= -\alpha \int_I u'\phi\,dx - \beta \int_I v'\phi\,dx \\ &= -\int_I (\alpha u' + \beta v')\phi\,dx.\end{aligned}$$

La norma su $W^{1,p}(I)$

Per ogni $u \in W^{1,p}(I)$ definiamo

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} := \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)}.$$

È immediato verificare che se $\|u\|_{W^{1,p}(I)}$, allora $u = 0$ e che

$$\|\alpha u\|_{W^{1,p}(I)} = |\alpha|\,\|u\|_{W^{1,p}(I)} \qquad \text{per ogni} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, $\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)}$ soddisfa la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{W^{1,p}(I)} &= \|u+v\|_{L^p(I)} + \|u'+v'\|_{L^p(I)} \\ &\le \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)} + \|v\|_{L^p(I)} + \|v'\|_{L^p(I)} \\ &= \|u\|_{W^{1,p}(I)} + \|v\|_{W^{1,p}(I)}.\end{aligned}$$

Quindi, $\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)}$ è una norma su $W^{1,p}(I)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

$W^{1,p}(I)$ è uno spazio di Banach

Dimostriamo che lo spazio normato $\Big(W^{1,p}(I)\,,\,\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)}\Big)$ è uno spazio di Banach. Sia $u_n \in W^{1,p}(I)$ una successione di Cauchy. Siccome

$$\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(I)} = \|u_n - u_m\|_{L^p(I)} + \|u_n' - u_m'\|_{L^p(I)},$$

abbiamo che le successioni

$$u_n \in L^p(I) \qquad \text{e} \qquad u_n' \in L^p(I)$$

sono di Cauchy in $L^p(I)$. Esistono quindi i limiti forti in $L^p(I)$:

$$u := \lim_{n\to+\infty} u_n \qquad \text{e} \qquad v := \lim_{n\to+\infty} u_n'.$$

Rimane da dimostrare che v è la derivata debole di u. Data una funzione test $\phi \in C_c^1(I)$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\int_I u(x)\phi'(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_I u_n(x)\phi'(x)\,dx \\ &= -\lim_{n\to+\infty}\int_I u_n'(x)\phi(x)\,dx = -\int_I v(x)\phi(x)\,dx. \qquad \square\end{aligned}$$

$W^{1,2}(I)$ è uno spazio di Hilbert

Per ogni $u, v \in W^{1,2}(I)$ definiamo:

$$< u, v >:= \int_I u(x)v(x)\,dx + \int_I u'(x)v'(x)\,dx.$$

Allora,

$$< \cdot, \cdot >: W^{1,2}(I) \times W^{1,2}(I) \to \mathbb{R}$$

è una forma bilineare simmetrica e definita positiva su $W^{1,2}(I)$. La norma associata è:

$$< u, u >^{1/2} = \left(\int_I u^2(x)\,dx + \int_I \big(u'(x)\big)^2\,dx\right)^{1/2},$$

ed è equivalente alla norma

$$\|u\|_{W^{1,2}(I)} = \|u\|_{L^2(I)} + \|u'\|_{L^2(I)}.$$

Di conseguenza, il prodotto scalare $< \cdot, \cdot >$ rende lo spazio $W^{1,2}(I)$ uno spazio di Hilbert.

$W^{1,p}(I)$ come sottospazio di $L^p(I) \times L^p(I)$.

Dato $p \in [1, +\infty]$, possiamo identificare lo spazio $W^{1,p}(I)$ con lo spazio delle coppie

$$(u, v) \in L^p(I) \times L^p(I)$$

tali per cui v è esattamente la derivata debole u', ovvero:

$$\int_I u(x)\phi'(x)\,dx = -\int_I v(x)\phi(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad \phi \in C_c^1(I).$$

Allora, $W^{1,p}(I)$ è un sottospazio chiuso dello spazio di Banach

$$L^p(I) \times L^p(I)$$

munito della norma

$$\|(f, g)\|_{L^p(I)\times L^p(I)} := \|f\|_{L^p(I)} + \|g\|_{L^p(I)}.$$

Di conseguenza, abbiamo:

Proposizione 1. *Per ogni $p \in [1, +\infty)$ lo spazio $W^{1,p}(I)$ è separabile.*