Lo spazio duale e convergenza debole in $W^{1,p}$

Lo spazio duale di $W^{1,p}(I)$

Osservazione 1. *Siano $p \in [1,+\infty]$ e $q := \frac{p}{p-1}$. Date due funzioni $\varphi \in L^q(I)$ e $\psi \in L^q(I)$, definiamo:*

$$T(u) = \int_I u(x)\varphi(x)\,dx + \int_I u'(x)\psi(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad u \in W^{1,p}(I).$$

Allora

$$T : W^{1,p}(I) \to \mathbb{R}\,,$$

è un funzionale lineare continuo su $W^{1,p}(I)$.

Per $p \in (1,+\infty)$ vale anche il viceversa.

Teorema 2. *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $p \in (1,+\infty)$. Dato un funzionale lineare continuo*

$$T : W^{1,p}(I) \to \mathbb{R}\,,$$

esistono due funzioni $\varphi \in L^q(I)$ e $\psi \in L^q(I)$, con $q := \frac{p}{p-1}$, tali che:

$$T(u) = \int_I u(x)\varphi(x)\,dx + \int_I u'(x)\psi(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad u \in W^{1,p}(I)\,.$$

Osservazione 3. *Osserviamo che la coppia di funzioni (φ,ψ) del teorema precedente non è univocamente determinata. Infatti, se $\phi \in C^1_c(I)$ è una funzione data, allora il funzionale*

$$T(u) = \int_I u(x)\phi'(x)\,dx + \int_I u'(x)\phi(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad u \in W^{1,p}(I),$$

è il funzionale nullo su $W^{1,p}(I)$ (per ogni $p \in [1,+\infty]$).

Convergenza debole in $W^{1,p}(I)$

Teorema 4. *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $p \in (1,+\infty)$. Data una successione $u_n \in W^{1,p}(I)$, sono equivalenti:*

(1) *u_n converge debolmente in $W^{1,p}(I)$ ad una qualche funzione $u \in W^{1,p}(I)$;*

(2) *esiste $u \in W^{1,p}(I)$ tale che $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $L^p(I)$ ed $u_n' \rightharpoonup u'$ debolmente in $L^p(I)$;*

(3) *u_n converge debolmente in $L^p(I)$ ad una qualche funzione $u \in L^p(I)$ ed u_n' converge debolmente in $L^p(I)$ ad una qualche funzione $v \in L^p(I)$.*

Corollario 5. *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $p \in (1,+\infty)$. Ogni successione limitata $u_n \in W^{1,p}(I)$ ammette una sottosuccessione debolmente convergente in $W^{1,p}(I)$.*

Corollario 6. *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $p \in (1,+\infty)$. Se $u_n \in W^{1,p}(I)$ converge debolmente ad $u \in W^{1,p}(I)$, allora u_n è limitata in $W^{1,p}(I)$ e si ha:*

$$\int_I |u'(x)|^p\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_I |u_n'(x)|^p\,dx \qquad e \qquad \int_I |u(x)|^p\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_I |u_n(x)|^p\,dx\,.$$